25 kop.

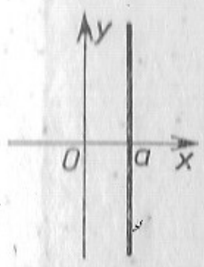
MATEMAATIKA IX KLASSILE

Olaf Prinits
Kalle Velsker

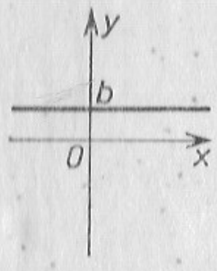
MATEMAATIKA

IX KLASSILE

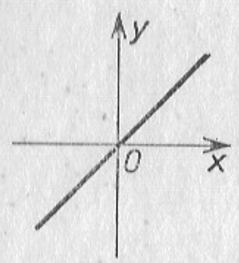
SIRGE VÕRRANDI ERIKUJUD



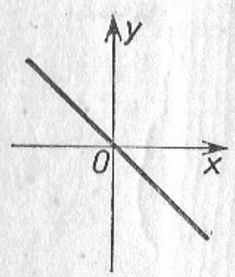
$x = a$



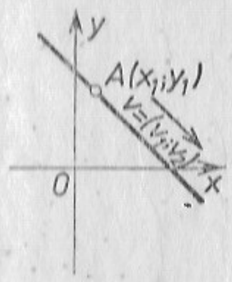
$y = b$



$y = x$

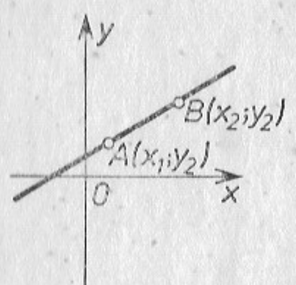


$y = -x$

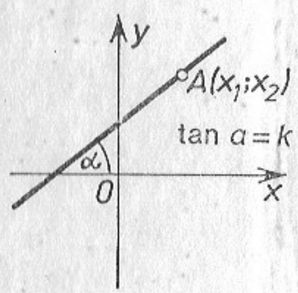


$$\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}$$

$$v_2(x-x_1)=v_1(y-y_1)$$

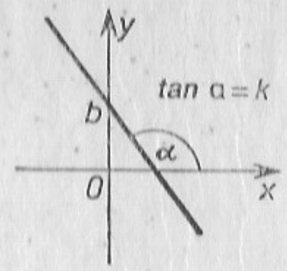


$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

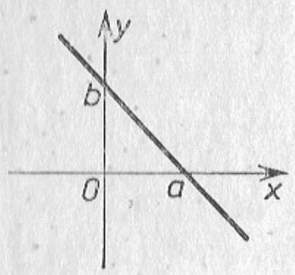


$$y-y_1=k(x-x_1)$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{v_2}{v_1}$$

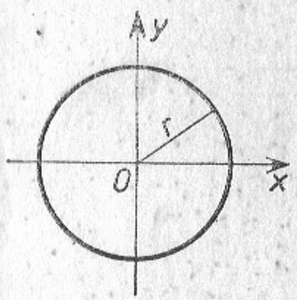


$y = kx + b$

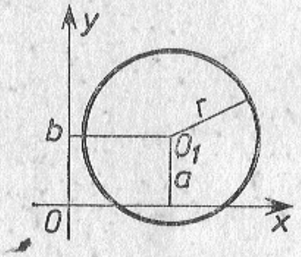


$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

RINGJOON

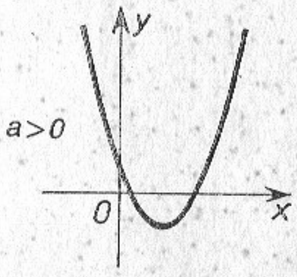


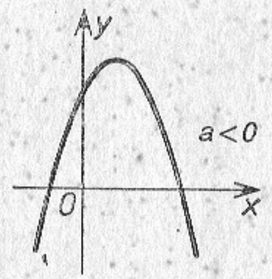
$x^2 + y^2 = r^2$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

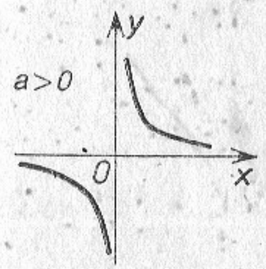
PARABOOL

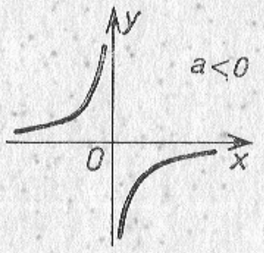




$y = ax^2 + bx + c$

HÜPERBOOL





$$y=\frac{a}{x}$$

OLAF PRINITS,
KALLE VELSKER

MATEMAATIKA IX KLASSILE

TOIMETANUD ÜLO KAASIK

7. Keskkool

TALLINN «VALGUS» 1986

51(075)
P77

Kinnitanud Eesti NSV Haridusministeerium

Kunstiliselt kujundanud V. Pääsuke

Veeristel on kasutatud järgmisi tähiseid:
k — kordamisülesanded, **m** — mõisted,
t — teoreemid, **v** — valemid, võrrandid,
ü — ülesanded.
* — tärnide vahel on materjal matemaatikast enam huvitatud õpilastele.

P $\frac{4306020400-238}{M902(16)-86}$ 124—86

© Kirjastus «Valgus», 1986

Õpiku kasutajale

Käesolev õpik laiendab kõigepealt sinu teadmisi ja oskusi geomeetria valdkonnas. Sulle tuttavaid jooni — sirgeid, ringjooni ja paraboole — õpid edaspidi tundma nende joonte võrrandite abil. Siin rakendad sa VI, VII ja VIII klassis õpitud võrrandite, võrrandisüsteemide ja võrratuste lahendamise oskust vastavate funktsioonide uurimiseks. Saad tuttavaks ka paarisfunktsiooni, paaritu funktsiooni ja pöördfunktsiooni mõistetega. Seejuures kasutad kujundi lüket ja peegeldust, mida õppisid VI klassis.

Funktsiooni uurimisel osutub vajalikuks funktsiooni määramispiirkonna leidmine. Käsitletakse ka selliseid funktsioone, mis on määratud positiivsete täisarvude hulgal, nn. arvjadasid. Eraldi õpid sa kasutama lineaarfunktsiooni väärtustele vastavat jada, nn. aritmeetilist jada. Et arvjada on lõpmatu, siis pakub huvi küsimus, kas jadas järjest kaugemale minnes jada liikmed hakkavad lähenema mõnele arvule või mitte. Sellele küsimusele vastuse otsimine viib jada piirväärtuse mõistele, mida õpid rakendama ka geomeetria valemite tuletamisel.

Sinu teadmised ja oskused avarduvad VIII klassis tundmaõpitud nurgafunktsioonide sin α, cos α ja tan α väärtuste leidmisega nurkade korral, mis pole terav-, täis- ega nürinurgad. Sa õpid tuletama ja kasutama mitmeid uusi trigonomeetria valemeid.

Kõikjal läheb sul vaja arvutamisoskust ja avaldiste teisendamise oskust. Pead kasutama ka oma teadmisi sirgetest, kolmnurkadest, nelinurkadest ja teistest hulknurkadest, samuti hulktahukatest.

Sinu oskusi aitavad kujundada ülesanded, mis on õpikus jaotatud kahte ossa: *A* ja *B*. Osa *A* ülesanded on lihtsamad. Osa *B* ülesanded on pisut keerukamad, kuid pakuvad seetõttu ka suuremat lahendamisrõõmu.

Iga peatüki lõpus on küsimused ja ülesanded, mille abil võid kontrollida oma teadmisi ja oskusi.

Head õpilusti! Kannatlikkust ülesannete lahendamisel!

Autorid

1 1. SIRGE VÕRRAND

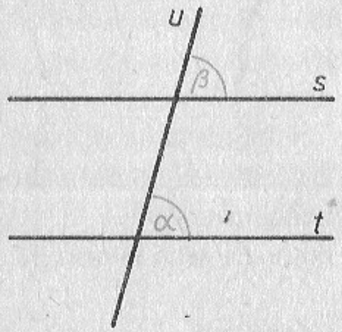
Sirge tundmaõppimist alustasime juba IV klassis, kus lõpmatut punktihulka — sirglõiku — pikendati üle mõlema otspunkti kui tahes kaugele. VI klassis jõudsime selgusele, et sirge on lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafik, mis lõikab y-telge punktis $(0;b)$. VII klassis uurisime sirgete lõikumist ja paralleelsust ning tõestasime kahe sirge paralleelsuse tunnused. Meenutame:

kaks sirget (s ning t) *on paralleelsed siis ja ainult siis, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega* (u) *on täidetud üks tingimustest:*

1) *üks paar kaasnurki on võrdsed* (joon. 1.1);
2) *üks paar põiknurki on võrdsed* (joon. 1.2);
3) *ühe paari lähisnurkade summa on 180°* (joon. 1.3).

IX klassis käsitleme sirget n.-ö. analüütiliselt, tema punktide koordinaatide kaudu. Me tuletame sirgele võrrandi mitmest erinevast määramisviisist

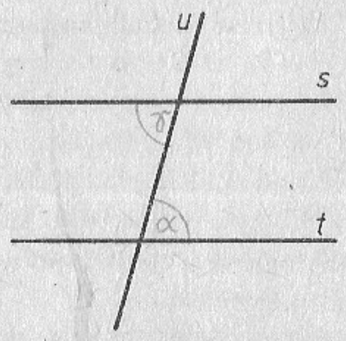
kaasnurgad



$\alpha = \beta \iff s \parallel t$

Joonis 1.1

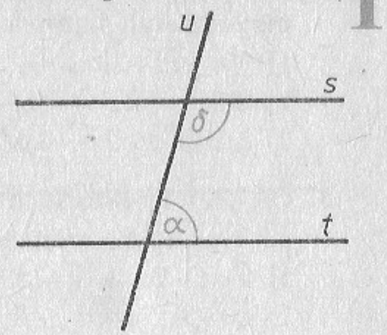
põiknurgad



$\alpha = \gamma \iff s \parallel t$

Joonis 1.2

lähisnurgad



$\alpha = \delta \iff s \parallel t$
$\alpha + \delta = 180°$

Joonis 1.3

lähtudes. Sealt jõuame järeldusele, et igale sirgele vastab antud koordinaatteljestikus teatav võrrand kujul $ax + by = c$, kus kordajad a ja b ei ole korraga nullid. See võrrand saab sirge üldvõrrandi nimetuse. Edasi selgitatakse need tingimused, mis kehtivad kahe sirge võrrandites esinevate kordajate vahel nende sirgete erinevate vastastikuste asendite korral.

Kõigepealt aga kordame ülesannete varal varemõpitut.

KORDAMINE

k

1. Missugune joon on
   1) võrdelise seose $y = ax$ graafikuks?
   2) pöördvõrdelise seose $y = \frac{a}{x}$ graafikuks?
   3) lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafikuks?
   4) ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks?

2. Joonesta järgmise funktsiooni graafik:
   1) $y = 2x$;
   2) $y = -0{,}5x$;
   3) $y = 2x - 3$;
   4) $y = -0{,}5x + 1$;
   5) $y = \frac{1}{x}$;
   6) $y = \frac{2}{x}$;
   7) $y = x^2 - 2$;
   8) $y = x^2 + 2x - 3$.

3. On antud punktid A ja B. Leia vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid ning pikkus, kui antud punktideks on
   1) $A(-3;1)$ ja $B(2;-4)$;
   2) $A(5;3)$ ja $B(1;0)$;
   3) $A(6;-3)$ ja $B(2;-6)$;
   4) $A(-7;-3)$ ja $B(-1;-2)$;
   5) $A(a;6)$ ja $B(5;-m)$;
   6) $A(x_1;y_1)$ ja $B(x_2;y_2)$.

4. Joonesta vabalt vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$. Kujuta joonisel järgnev vektor (avaldist eelnevalt lihtsustades):

1) $3(\vec{u}-\vec{v})+2(\vec{u}+\vec{v})$;
2) $2(3{,}5\vec{u}-2{,}5\vec{v})-0{,}5(6\vec{u}-5\vec{v})$;
3) $3{,}2(4\vec{u}+1{,}5\vec{v})-1{,}6(3\vec{v}+3{,}5\vec{u})$.

5. On antud vektorid $\vec{u}=(u_1;\ u_2)$ ja $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$. Avalda vektorite $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ ja $k\vec{u}$ koordinaadid, kui

1) $\vec{u}=(-2;\ 4)$, $\vec{v}=(5;\ -1)$ ja $k=2$;
2) $\vec{u}=(3;\ 5)$, $\vec{v}=(-2;\ -5)$ ja $k=-1{,}5$.

6. On antud vektorid $\vec{u}=(-1;\ 2)$ ja $\vec{v}=(3;\ -2)$. Avalda järgmise vektori koordinaadid:

1) $\vec{u}+\vec{v}$;
2) $\vec{u}-\vec{v}$;
3) $2\vec{u}-3\vec{v}$;
4) $2{,}3\vec{v}-3{,}2\vec{u}$;
5) $2(\vec{u}-3\vec{v})+3(\vec{v}-3\vec{u})$;
6) $3(2\vec{u}-5(2\vec{u}-3\vec{v})$.

7. On antud punktid $A(-2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$ ja $C(2;\ -3)$. Avalda

1) vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid;
2) vektori $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ koordinaadid;
3) vektori $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ koordinaadid;
4) vektori $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ koordinaadid.

8. On antud punktid $A(1;\ 2)$, $B(5;\ 6)$, $C(7;\ 8)$ ja $D(5;\ 12)$.

1) Leia vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ koordinaadid.
2) Esita vektorid $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ristuvate ühikvektorite $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ abil.
3) Arvuta nelinurga $ABCD$ ümbermõõt.

9. On antud täisnurkne kolmnurk kaatetitega a ja b ning hüpotenuusiga c (joon. 1.4). Avalda

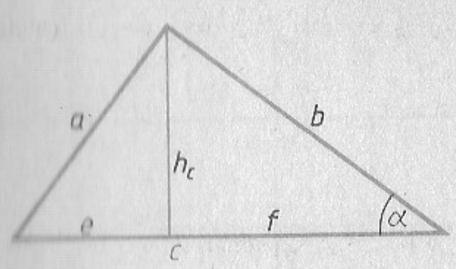
1) seos a, b ja c vahel;
2) kaatet a tema projektsiooni e ja hüpotenuusi c kaudu;
3) täisnurga tipust tõmmatud kõrgus h_c kaatetite projektsioonide e ja f kaudu;
4) $\sin\alpha$;
5) $\cos\alpha$;
6) $\tan\alpha$.

Lahenda see ülesanne juhul, kui

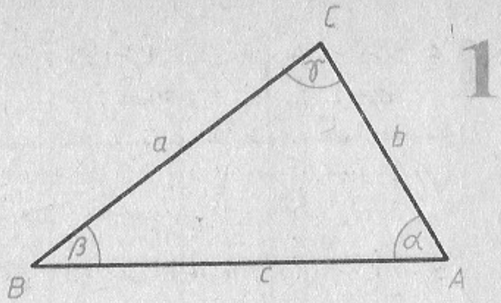
1) $a=3$ ja $b=4$;
2) $a=5$ ja $c=13$.

10. On antud kolmnurk ABC (joon. 1.5). Avalda

1) seos selle kolmnurga külgede ja nende vastasnurkade vahel;
2) külg a külgede b ja c ning nendevahelise nurga α kaudu.



Joonis 1.4



Joonis 1.5

11. Arvuta kolmnurga ABC puuduvad elemendid, kui

1) $a=10{,}9$, $\beta=33°24'$ ja $\gamma=66°59'$;
2) $c=16$, $\alpha=143°08'$ ja $\beta=22°37'$;
3) $a=20$, $b=13$ ja $\alpha=67°23'$;
4) $a=37$, $c=59$ ja $\gamma=23°20'$.

12. Leia kolmnurga ABC ümbermõõt ja sisenurgad, kui tippudeks on punktid

1) $A(-2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$ ja $C(2;\ -3)$;
2) $A(0;\ -3)$, $B(0;\ 4)$ ja $C(2;\ -1)$.

13. On antud punktid $A(-3;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(3;\ 0)$ ja $D(0;\ -4)$. Leia nelinurga $ABCD$

1) ümbermõõt; 2) sisenurgad; 3) pindala.

14. Joonesta vektorid

$\vec{s}=(2;\ 0)$, $\vec{t}=(0;\ -5)$, $\vec{u}=(3;\ 3)$, $\vec{v}=(-2;\ 2)$

ja kirjelda nende asendit koordinaattelgede suhtes.

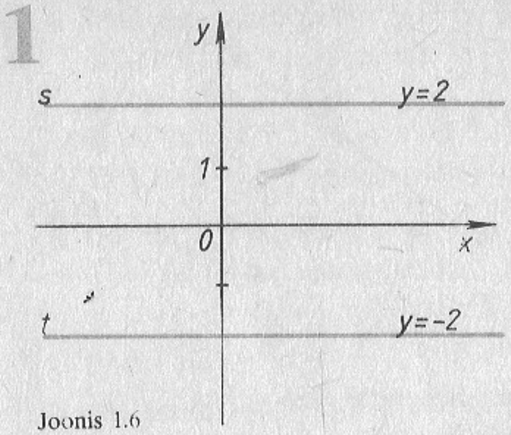
15. Joonesta vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ning leia seos nende vektorite vahel, kui

1) $\vec{u}=(-3;\ 2)$ ja $\vec{v}=(3;\ -2)$;
2) $\vec{u}=(3;\ -2)$ ja $\vec{v}=(-6;\ 4)$;
3) $\vec{u}=(-3;\ -2)$ ja $\vec{v}=(-1{,}5;\ -1)$;
4) $\vec{u}=(3;\ 2)$ ja $\vec{v}=(-9;\ -6)$.

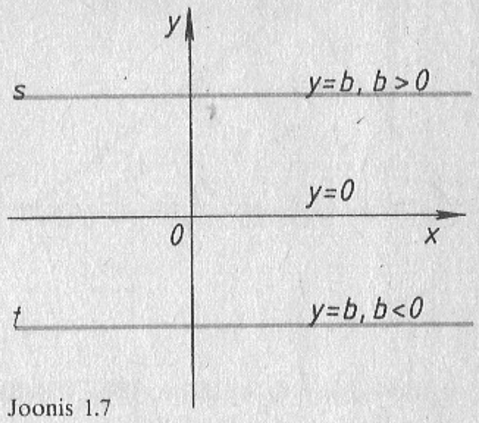
1.1. KOORDINAATTELGEDEGA PARALLEELSETE SIRGETE VÕRRANDID

Sirge võrrandi mõistega tutvumist alustame sirgetest, mis on paralleelsed koordinaattelgedega.

Joonisel 1.6 on kujutatud kaks x-teljega paralleelset sirget, millede kõik punktid on x-teljest 2 ühiku kaugusel. Sirgel s, mis asetseb ülalpool x-telge,



Joonis 1.6



Joonis 1.7

on kõigi punktide ordinaadid y võrdsed arvuga 2. See on antud sirge kõigi punktide ühine omadus. Seost

$$y=2$$

nimetatakse vaadeldava sirge s võrrandiks.

Sirgel t, mis asetseb allpool x-telge, on kõigi punktide ordinaadid y võrdsed arvuga -2. Selle sirge võrrand on:

$$y=-2.$$

Üldiselt, võrrandit $y=b$, kus b on konstant, rahuldavad nende ja ainult nende punktide koordinaadid, mis asetsevad x-teljega paralleelsel ja temast $|b|$ ühiku kaugusel oleval sirgel. Seepärast nimetatakse võrrandit

$y=b$ ehk $y-b=0$

x-teljega paralleelse sirge võrrandiks (joon. 1.7).

Kui võrrandis

1) $b>0$, siis see sirge on ülalpool x-telge,

2) $b<0$, siis see sirge on allpool x-telge,

3) $b=0$, siis see sirge ühtib x-teljega.

Analoogiliselt, võrrandit $x=a$, kus a on konstant, rahuldavad nende ja ainult nende punktide koordinaadid, mis asetsevad y-teljega paralleelsel ja temast $|a|$ ühiku kaugusel oleval sirgel. Seepärast nimetatakse võrrandit

$x=a$ ehk $x-a=0$

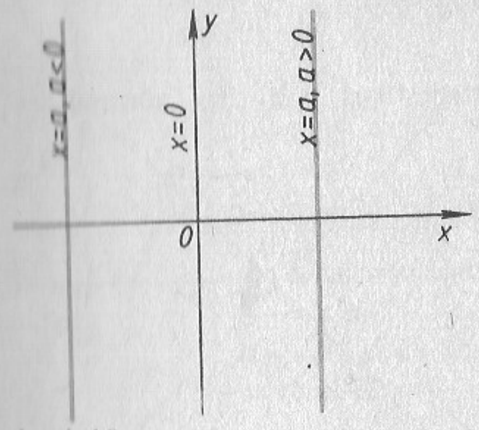
y-teljega paralleelse sirge võrrandiks (joon. 1.8).

Kui võrrandis

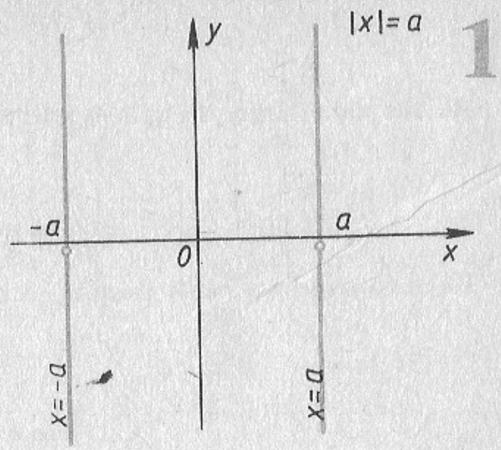
1) $a>0$, siis see sirge on paremal pool y-telge,

2) $a<0$, siis see sirge on vasakul pool y-telge,

3) $a=0$, siis see sirge ühtib y-teljega.



Joonis 1.8



Joonis 1.9

Märkused. 1) Edaspidi kasutatakse väljendi «sirge, mille võrrand on . . .» asemel mõnikord ka lühemat sõnastust «sirge . . .». Niisiis väljend «sirge $y=2$» tähendab sama, mis «sirge, mille võrrand on $y=2$».

2) Väljendites «ülalpool x-telge», «vasakul pool y-telge» jms. peetakse silmas teljestiku sellist asendit, kus x-telg on rõhtne ja suundub vasakult paremale, y-telg aga püstne ja suundub alt üles.

* Teatavasti arvu x absoluutväärtus $|x|$ avaldub kujul

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ kui } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ kui } x<0. \end{cases}$$

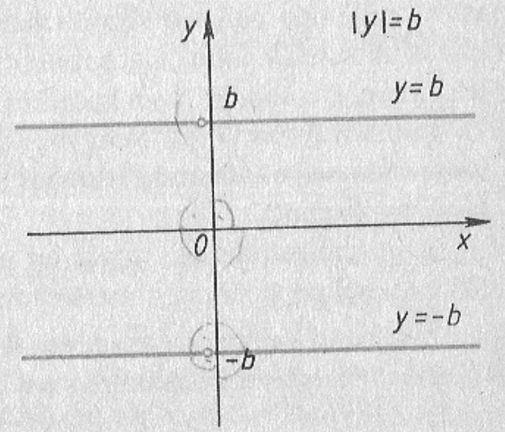
Seepärast esitab võrrand

$$|x|=a$$

$a>0$ korral paralleelsete sirgete paari, mille võrrandid on $x=a$ ja $x=-a$ (joon. 1.9). Analoogiliselt võrrand

$$|y|=b$$

esitab $b<0$ korral paralleelsete sirgete paari võrranditega $y=b$ ja $y=-b$ (joon. 1.10). *



Joonis 1.10

A.

16. Kirjelda sirge asendit koordinaatteljestikus, kui sirge võrrand on

1) $x=5$; 2) $y=3$; 3) $x=-4$;
4) $3x=6$; 5) $-2y=7$; 6) $-3x=-9$;
7) $2x-5=0$; 8) $3y+10=0$; 9) $5x=0$.

17. Leia sirgetevaheline kaugus, kui nende võrrandid on

1) $x=3$ ja $x=5$; 2) $x=-2$ ja $x=-7$;
3) $2x=-6$ ja $3x=8$; 4) $5x=3$ ja $2x=-10$;
5) $3y=-12$ ja $2y=-8$; 6) $-4y=20$ ja $5y=-15$.

18. Leia sellise sirge võrrand, mille punktid on ühekaugusel sirgetest

1) $y=-4$ ja $y=2$;
2) $x=-5$ ja $x=-1$;
3) $y=10$ ja $y=0$.

B.

19. Leia sellise sirge võrrand, mis on paralleelne sirgetega $x=-3$ ja $x=5$ ning jaotab nendevahelise riba pooleks.

20. Leia sellise sirge võrrand, mis jaotab sirgete $y=-2$ ja $y=4$ vahelise kauguse suhtes 1 : 2.

1.2. KOORDINAATTELGEDE VAHELISE NURGA POOLITAJA VÕRRAND

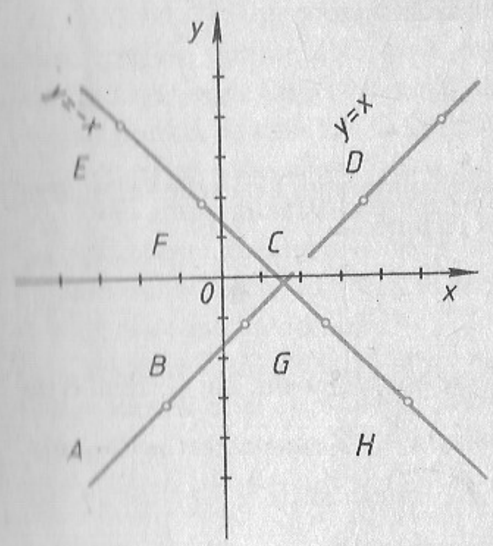
Koordinaattelgedega jaotub tasand neljaks veerandiks. Iga veerand on täisnurk, mille tipp paikneb koordinaatide alguspunktis. Tõmbame ühe sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja poolitab nii I kui ka III veerandi ja teise sirge, mis samuti läbib koordinaatide alguspunkti, kuid poolitab II ja IV veerandi (joon. 1.11). Neid sirgeid nimetatakse vastavalt **koordinaattasandi esimese ja kolmanda veerandi poolitajaks ning teise ja neljanda veerandi poolitajaks.**

Et nurgapoolitaja iga punkt on nurga mõlemast haarast ühekaugusel, siis esimesel neist sirgetest asetsevad näiteks punktid

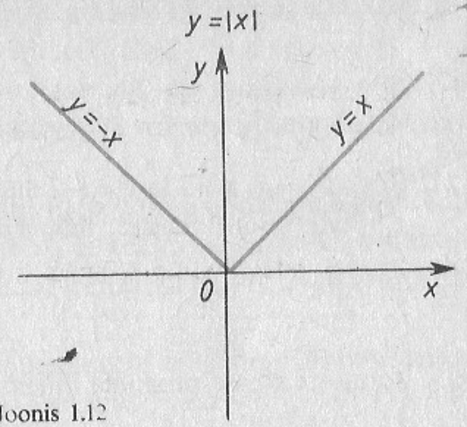
$A(-4;\ -4)$, $B(-2;\ -2)$, $O(0;\ 0)$, $C(1;\ 1)$, $D(3;\ 3)$

ja teisel sirgel näiteks punktid

$E(-3;\ 3)$, $F(-1;\ 1)$, $O(0;\ 0)$, $G(2;\ -2)$, $H(4;\ -4)$.



Joonis 1.11



Joonis 1.12

Esimese sirge mis tahes punkti $P(x;y)$ koordinaatide vahel kehtib võrdus $y=x$ ja teise sirge mis tahes punkti $P(x;y)$ koordinaatide vahel võrdus $y=-x$. Et neid võrrandeid rahuldavad vastava nurgapoolitaja kõigi punktide koordinaadid ja ainult need, siis nimetatakse võrrandit

$$y=x \text{ ehk } x-y=0$$

koordinaattasandi esimese ja kolmanda veerandi poolitaja võrrandiks ja võrrandit

$$y=-x \text{ ehk } x+y=0$$

koordinaattasandi teise ja neljanda veerandi poolitaja võrrandiks.

* Võrrandiga

$y=|x|$

on esitatud murdjoon, mida näeme joonisel 1.12. Seevastu aga võrrandiga

$|y|=|x|$

on esitatud nii sirge $y=x$ kui ka sirge $y=-x$, s. t. see võrrand määrab üheaegselt mõlemad nurgapoolitajad (joon. 1.11). *

A.

21. Kirjelda kahe antud sirge asendit koordinaatteljestikus, joonesta need sirged ning leia nende lõikepunkti koordinaadid, kui sirgete võrrandid on

1) $y=x$ ja $y=2$;
2) $y=x$ ja $x=-3$;
3) $y=-x$ ja $y=-2$;
4) $y=-x$ ja $x=5$.

22. Sirged $y=x$, $x=3$ ja $y=-2$ määravad kolmnurga. Leia selle kolmnurga tippude koordinaadid, ümbermõõt ja pindala.

B

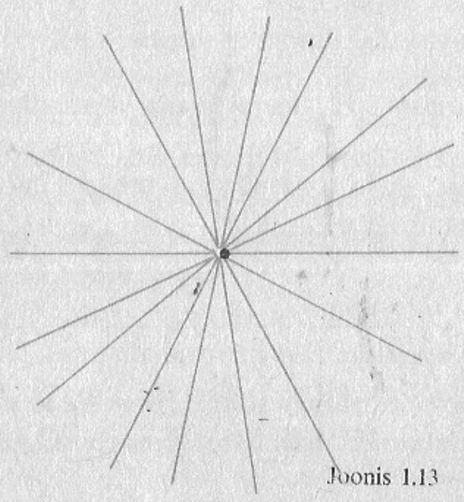
23. Joonesta sirged ning leia lõikepunktide koordinaadid, kui võrrandid on
1) $|y|=2$ ja $x=|3|$;
2) $y=-4$ ja $|x|=1$;
3) $y=-|x|$ ja $|x|=|a|$;
4) $x=|y|$ ja $y=-|b|$;
5) $|y|=|x|$ ja $y=2$;
6) $|y|=|x|$ ja $|x|=2$.

1.3. SIRGE MÄÄRAMISVIISE

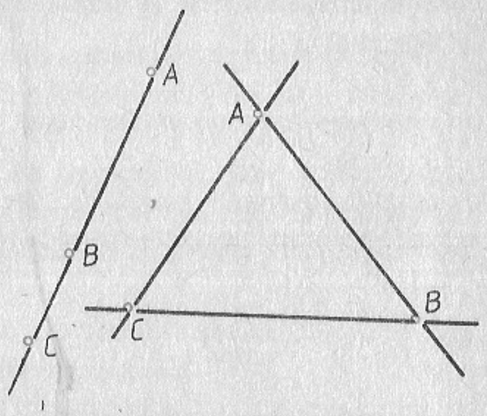
Püstitame nüüd küsimuse: missuguste andmete järgi saab joonestada sirget. Seejuures nõuame, et andmete hulk

1) oleks **kooskõlas** ja **küllaldane**, s. t. et nende järgi saab joonestada ühe ja ainult ühe sirge,

2) ei **sisaldaks ülearuseid**, s. t. selliseid, millede ärajäämisel jääks järgi sirge joonestamiseks küllaldane andmete hulk.



Joonis 1.13



Joonis 1.14

Näited. 1) Sirge joonestamiseks ei piisa ainult sirge ühe punkti teadmisest, sest üht punkti läbib terve sirgete kimp (joon. 1.13).

2) Sirge joonestamiseks temal olevate punktide järgi pole vaja ette anda kolme punkti, sest siis kas üks punkt on ülearune või nende kolme punktiga on määratud kolm sirget (joon. 1.14).

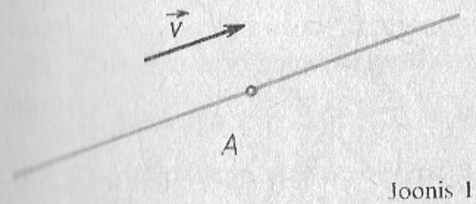
Olgu antud punkt A ja vektor $\vec{v}$ (joon. 1.15). Tõmbame sirge läbi punkti A vektoriga $\vec{v}$ määratud sihis. Punktiga A ja vektoriga $\vec{v}$ on sirge ühiselt määratud. Näiteks joonisel 1.16 on esitatud punktiga $P(-3;\ 2)$ ja vektoriga $\vec{v}=(2;\ -4)$ määratud sirge.

Vektorit $\vec{v}$, mis määrab sirge sihi, nimetatakse selle **sirge sihivektoriks.** Sirge sihivektor ei ole üheselt määratud. Kui antud sirge sihivektoriks on $\vec{v}$, siis võivad sama sirge sihivektoriks olla ka vektorid

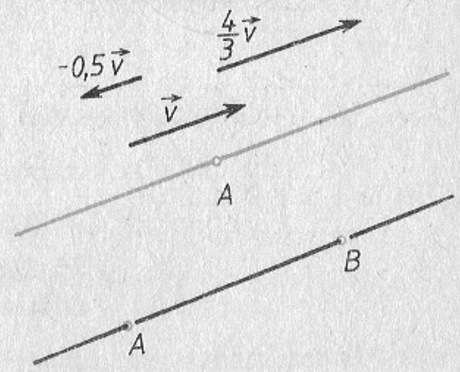
$2\vec{v}$, $-0{,}5\vec{v}$, $\frac{4}{3}\vec{v}$ jne. (joon. 1.17).

Üldiselt võib selle sirge sihivektoriks olla iga vektor, mis avaldub kujul $r\vec{v}$, kus r on nullist erinev konstant.

Olgu antud kaks punkti A ja B (joon. 1.18). Läbi nende punktide tõmbame sirge. Punktidega A ja B on sirge üheselt määratud. Näiteks joonisel 1.19 on esitatud punktidega $K(-3;\ 1)$ ja $L(2;\ 5)$ määratud sirge.

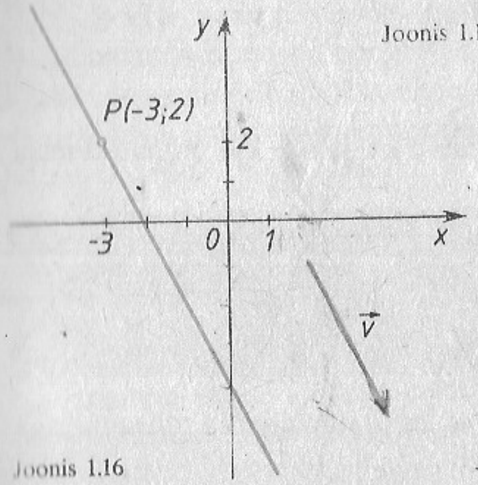


Joonis 1.15

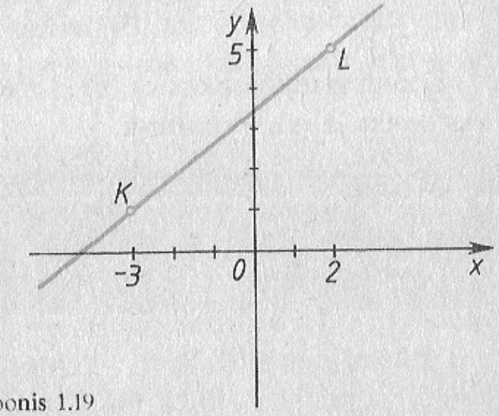


Joonis 1.17

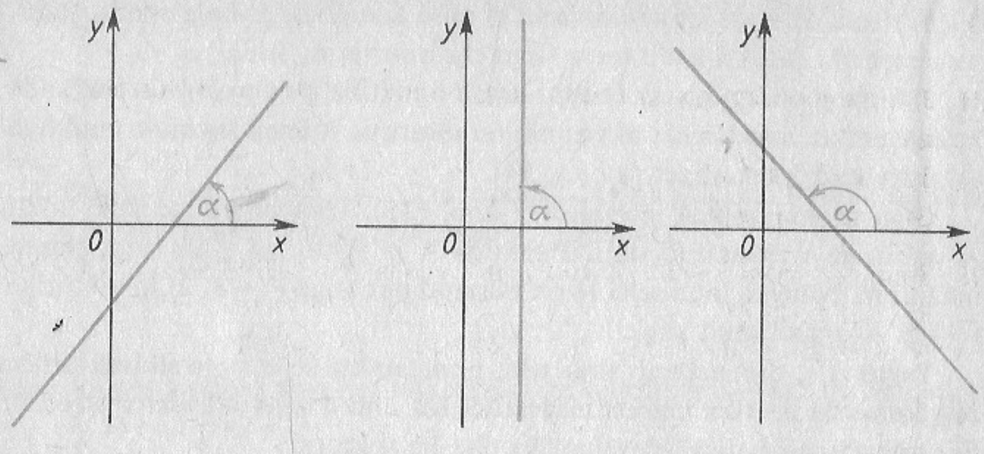
Joonis 1.18



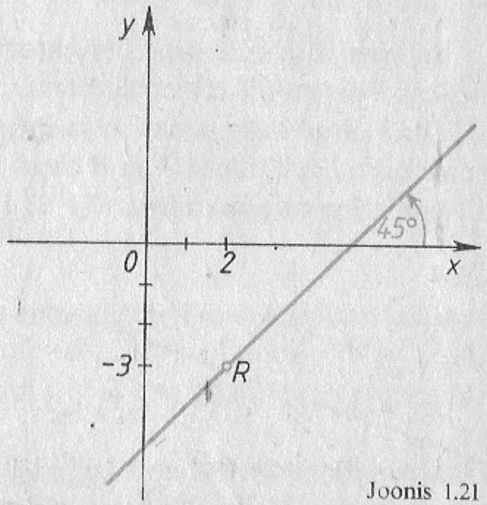
Joonis 1.16



Joonis 1.19



Joonis 1.20



Joonis 1.21

Koordinaatteljestikus on sirge määratud ka juhul, kui on antud tema üks punkt ja nn. tõusunurk.

Nurka *x*-telje positiivsest suunast vastu kellaosuti liikumissuunda kuni seda telge lõikava sirgeni nimetatakse selle sirge tõusunurgaks (joon. 1.20).

Näiteks joonisel 1.21 on esitatud sirge, mis on määratud tõusunurgaga $\alpha = 45°$ ja punktiga $R(2; -3)$.

A.

24. Joonesta koordinaatteljestikus sirge, mille üks punkt ja sihivektor on antud:
1) $A(2; 3)$ ja $\vec{v}=(1; 2)$; 2) $B(-3; 1)$ ja $\vec{v}=(2; -2)$;
3) $C(5; -2)$ ja $\vec{v}=(-4; 3)$; 4) $D(-2; -4)$ ja $\vec{v}=(-1; -3)$.

25. Joonesta koordinaatteljestikus sirge, mis on määratud punktidega
1) $A(3; 2)$ ja $B(-2; 3)$; 2) $A(-3; -4)$ ja $B(2; -5)$;
3) $A(0; 3)$ ja $B(-2; 1)$; 4) $A(-2; 0)$ ja $B(0; 4)$.

26. Joonesta koordinaatteljestikus sirge, mis on määratud ühe punkti ja tõusunurgaga:
1) $A(3; 2)$ ja $\alpha=30°$; 2) $B(-3; 2)$ ja $\alpha=135°$;
3) $C(3; -2)$ ja $\alpha=60°$; 4) $D(-3; -2)$ ja $\alpha=150°$.

27. Joonesta koordinaatteljestikus sirge, kui on antud tõusunurk ja üks punkt:
1) $\alpha=45°$ ja $A(0; 3)$; 2) $\alpha=60°$ ja $B(0; -1)$
3) $\alpha=120°$ ja $C(0; 5)$; 4) $\alpha=135°$ ja $D(0; -3)$.

B.

28. Joonesta koordinaatteljestikus sirge, mis on määratud
1) punktiga $A(-1{,}5; \frac{2}{3})$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(-1{,}5; \frac{2}{3})$;
2) punktidega $A(3{,}2; -4{,}6)$ ja $B(-0{,}8; -3{,}2)$;
3) punktiga $A(4; -3)$ ja tõusunurgaga 36°;
4) punktiga $A(0; 2)$ ja tõusunurgaga 136°.

Eespool leidsime niisuguste sirgete võrrandid, mis on paralleelsed ühega koordinaattelgedest või poolitavad koordinaattasandi veerandeid. Kõigi nende võrrandite puhul rõhutasime, et saadud võrrandeid rahuldavad vastava sirge kõigi punktide koordinaadid ja ainult need. See omadus ongi sirge võrrandi defineerimise aluseks.

Sirge võrrandiks nimetatakse seost selle sirge mis tahes punkti koordinaatide vahel, mida rahuldavad sirge kõigi punktide koordinaadid ja ainult need.

Järgnevalt seame ülesandeks leida sirge võrrand ka ilma selle sirge asendit koordinaattelgede suhtes kitsendamata. Teeme seda sirge määramise

1 kõigil äsjavaadeldud juhtudel, s. t. leiame seose sirge mis tahes punkti koordinaatide x ja y vahel, kasutades etteantud

1) punkti ja sihivektori koordinaate,

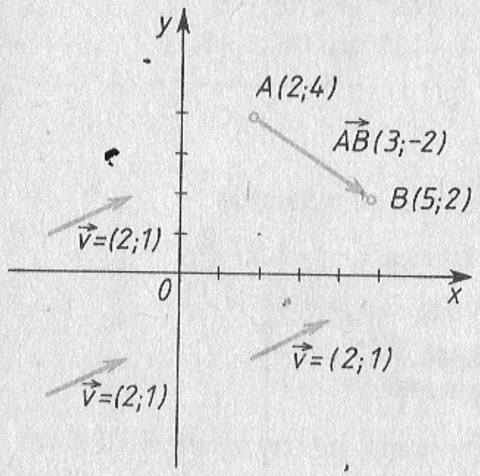
2) kahe punkti koordinaate,

3) tõusunurka ja ühe punkti koordinaate.

Püstitatud ülesande lahendamiseks täiendame esmalt oma teadmisi nn. kollineaarsete vektorite kohta.

1.4. KOLLINEAARSED VEKTORID

Vektoritega tutvusime juba VII klassis. Teame, et vektor on suunatud lõik, mis koordinaatteljestikus on määratud kas oma otspunktide koordinaatidega või vektori enda koordinaatidega. Esimesel juhul on vektori asend koordinaattasandil nende punktidega üheselt määratud, teisel juhul võime aga vektori alguspunkti suvaliselt valida (joon. 1.22).



Joonis 1.22

Olgu antud vektorid $\vec{u}=(u_1;\ u_2)$ ja $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$ (joon. 1.23), siis

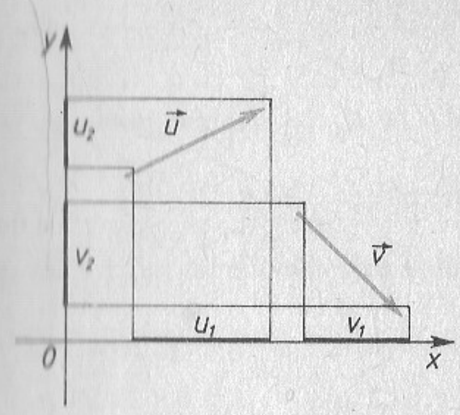
$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1;\ u_2+v_2)$;

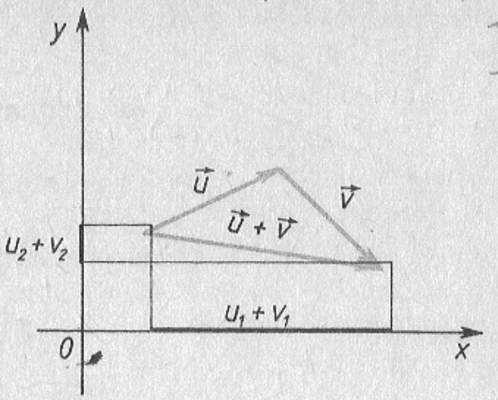
$\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1;\ u_2-v_2)$;

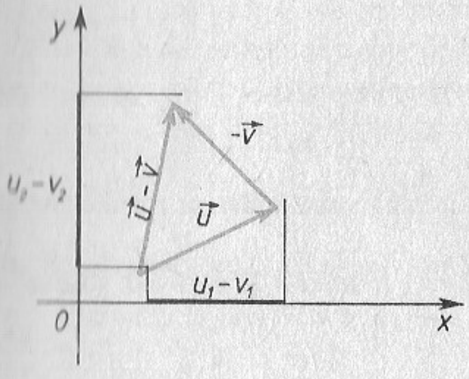
$r\vec{v}=(rv_1;\ rv_2)$, kus r on konstant.

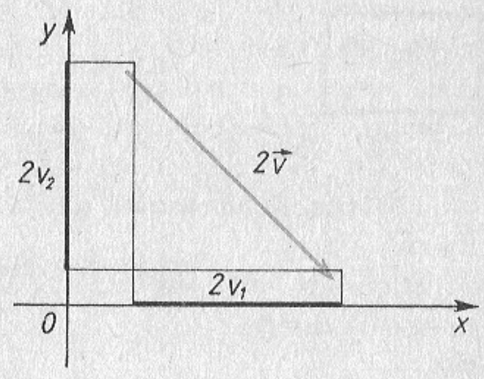
Kui $\vec{u}=\vec{v}$, siis $u_1=v_1$ ja $u_2=v_2$ (joon. 1.24). Samuti vastupidi, kui $u_1=v_1$ ja $u_2=v_2$, siis $\vec{u}=\vec{v}$.

Kaht vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, millede vahel kehtib seos $\vec{u}=r\vec{v}$, kus r on konstant, nimetatakse kollineaarseteks (ehk samasihilisteks).

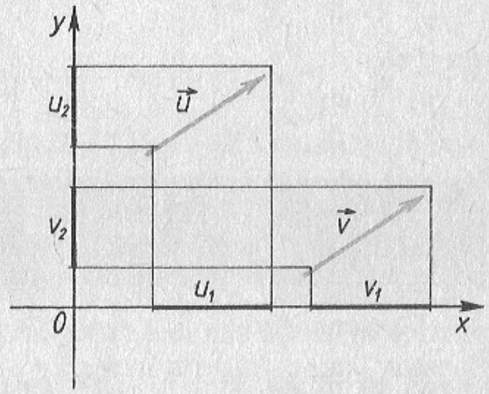








Joonis 1.23

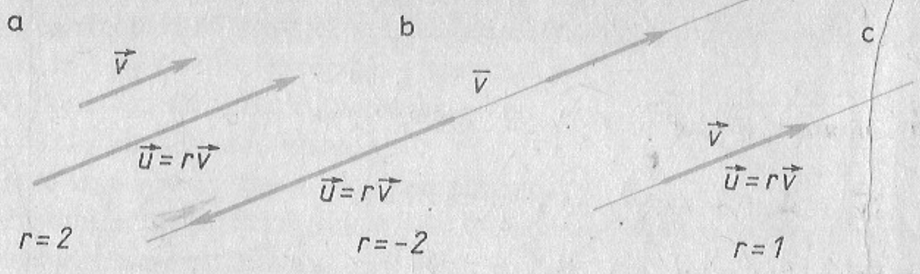


Joonis 1.24

Need vektorid võivad olla kas paralleelsed, asetseda ühel ja samal sirgel või koguni ühtida, kui $r=1$ (joon. 1.25). Igal juhul aga tähistatakse vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kollineaarsust kujul $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Teoreem. **Kollineaarsete vektorite $\vec{u}=(u_1;\ u_2)$ ja $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$ vastavad koordinaadid on võrdelised, s. t.**

1



Joonis 1.25

V

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}.$$

Tõestus. Kollineaarsuse tõttu leidub niisugune konstant r mille korral $\vec{u}=r\vec{v}$.

Et $r\vec{v}=(rv_1, rv_2)$, siis vektorite $\vec{u}$ ja $r\vec{v}$ võrdsusest järelduvad võrdused $u_1=rv_1$ ja $u_2=rv_2$
ehk

$$\frac{u_1}{v_1}=r \text{ ja } \frac{u_2}{v_2}=r$$

ning siit

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=r.$$

t

Kehtib ka *pöördteoreem*: kui kahe vektori vastavad koordinaadid on võrdelised, siis need vektorid on kollineaarsed.

Tõestus. Kui

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=r,$$

siis $u_1=rv_1$ ja $u_1=rv_2$ ning $\vec{u}=r\vec{v}$, s. t. $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

Kollineaarsuse tingimusest

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$$

järeldub, et

$$u_1v_2=u_2v_1.$$

Tingimuse niisugusel kujul on see eelis, et teda saab kasutada ka siis, kui näiteks v_2 on null, s. t. kui vektori $\vec{v}$ siht ühtib x-telje sihiga.

A.

1 ü

29. On antud vektor $\vec{v}=(-2;\ 5)$. Leia vektorite

$2\vec{v}$, $-3\vec{v}$, $0{,}3\vec{v}$, $2{,}5\vec{v}$, $-\frac{4}{3}\vec{v}$ koordinaadid.

30. Esita kolm antud vektoriga kollineaarset vektorit:

1) $\vec{u}=(1;\ 2)$; 2) $\vec{v}=(-4;\ 5)$; 3) $\vec{w}=\left(\frac{3}{2};\ \frac{2}{5}\right)$;
4) $\vec{r}=(-2{,}5;\ 3{,}4)$; 5) $\vec{s}=(0{,}14;\ -2{,}21)$;
6) $\vec{t}=\left(-\frac{3}{7};\ \frac{4}{3}\right)$.

31. Teades, et $\vec{u}\parallel\vec{v}$, leia otsitav koordinaat x, kui

1) $\vec{u}=(2;\ 5)$ ja $\vec{v}=(4;\ x)$; 2) $\vec{u}=(-4;\ x)$ ja $\vec{v}=(8;\ -6)$;
3) $\vec{u}=(x;\ -7)$ ja $\vec{v}=(-3;\ 14)$; 4) $\vec{u}=(15;\ -36)$ ja $\vec{v}=(x;\ 12)$.

32. Selgita, kas vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed, kui

1) $\vec{u}=(3;\ 3)$ ja $\vec{v}=(-4;\ 6)$;
2) $\vec{u}=(-2;\ 3)$ ja $\vec{v}=(8;\ -12)$;
3) $\vec{u}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right)$ ja $\vec{v}=(4;\ -9)$;
4) $\vec{u}=\left(-\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right)$ ja $\vec{v}=\left(\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3}\right)$.

33. On antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$. Leia selle kuusnurga tippudega määratud vektorite hulgast kõik need, mis on kollineaarsed

1) vektoriga $\overrightarrow{AB}$; 2) vektoriga $\overrightarrow{AD}$.

34. On antud korrapärane kuusnurkne prisma $AB\ldots F_1$. Leia selle prisma tippudega määratud vektorite hulgast kõik need, mis on kollineaarsed

1) vektoriga $\overrightarrow{AB}$; 2) vektoriga $\overrightarrow{AC}$; 3) vektoriga $\overrightarrow{AA_1}$;
4) vektoriga $\overrightarrow{AB_1}$.

1.5. PUNKTI JA SIHIVEKTORIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND

Vaatleme nüüd sirget s, mis on määratud punktiga $A(x_1; y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(v_1; v_2)$ (joon. 1.26). Selgitame, millal punkt $P(x; y)$ asetseb sirgel s. See juhtub parajasti siis, kui vektorid $\overrightarrow{AP}$ ja $\vec{v}$ osutuvad kollineaarseteks. Et $\overrightarrow{AP}=(x-x_1; y-y_1)$, siis kollineaarsusest järeldub võrdus

$$\boxed{\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}}$$

ehk

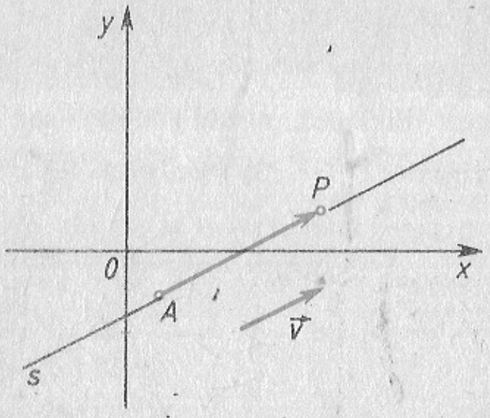
$$\boxed{v_2(x-x_1)=v_1(y-y_1)}$$

Seda võrdust nimetataksegi **punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrandiks.**

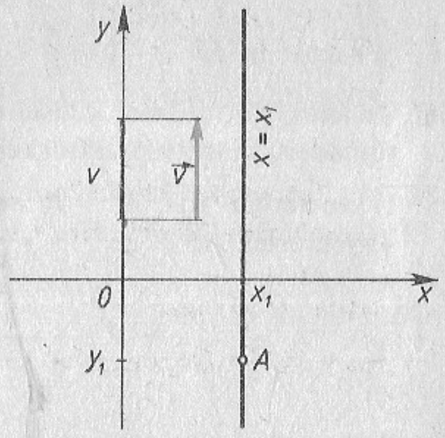
Näide. Sirge on määratud punktiga $P(-3; 2)$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(2; -4)$ (vt. joon. 1.16). Selle sirge võrrand on

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-4} \text{ ehk } -4(x+3)=2(y-2).$$

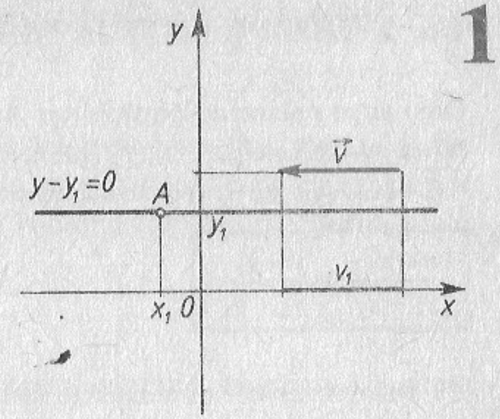
Juhul, kui sirge on paralleelne ühega koordinaattelgedest ja läbib punkti $A(x_1; y_1)$, siis tema võrrandiks on kas $x-x_1=0$ või $y-y_1=0$ (vt. lk. 8). Veendume, et kui koordinaatteljega paralleelne sirge on antud oma punkti ja sihivektoriga, siis teiseneb tema võrrand sellisele, meile juba tuttavale kujule.



Joonis 1.26



Joonis 1.27



Joonis 1.28

Olgu sirge määratud punktiga $A(x_1; y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(0; v_2)$ (joon. 1.27). Selle sirge võrrandiks on

$v_2(x-x_1)=0(y-y_1)$

ehk $v_2(x-x_1)=0$ ehk $x-x_1=0$.

Näita, et kui sirge on määratud punktiga $A(x_1; y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(v_1; 0)$ (joon. 1.28), siis tema võrrand teiseneb kujule $y-y_1=0$.

A.

35. Leia punktiga A ja sihivektoriga $\vec{v}$ määratud sirge võrrand, kui
1) $A(2; -3)$ ja $\vec{v}=(-1; 2)$;
2) $A(3; 5)$ ja $\vec{v}=(3; -3)$;
3) $A(-2; -1)$ ja $\vec{v}=(-5; -3)$;
4) $A(-7; 4)$ ja $\vec{v}=(8; 5)$;
5) $A(0; 2)$ ja $\vec{v}=(2; 0)$;
6) $A(-5; 0)$ ja $\vec{v}=(-3; 3)$;
7) $A(0; 0)$ ja $\vec{v}=(-1; 0)$;
8) $A(2; -1)$ ja $\vec{v}=(0; -2)$.

ü

B.

36. Missugune seos kehtib koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajate sihivektorite koordinaatide v_1 ja v_2 vahel?

37. Näita, et võrrand $\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}$ teiseneb koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajate korral vastavalt kas kujule $y=x$ või kujule $y=-x$.

1.6. KAHE PUNKTIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND

Olgu sirge määratud punktidega $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ ning selle sirge mis tahes punktiks olgu $P(x; y)$ (joon. 1.29). Et vektorid $\overrightarrow{AP}=(x-x_1; y-y_1)$ ja $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$ peavad olema kollineaarsed, siis

V

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}\ .$$

Seda võrrandit nimetatakse **kahe punktiga määratud sirge võrrandiks.**

Näide. Sirge on määratud punktidega $K(-3; 1)$ ja $L(2; 5)$ (joon. 1.19). Selle sirge võrrand on

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{4} \Rightarrow 4(x+3)=5(y-1)$$

või punktide järjekorda muutes

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-5}{-4} \Rightarrow 4(x-2)=5(y-5).$$

Saadud võrrandid on samaväärsed. Tõepoolest:

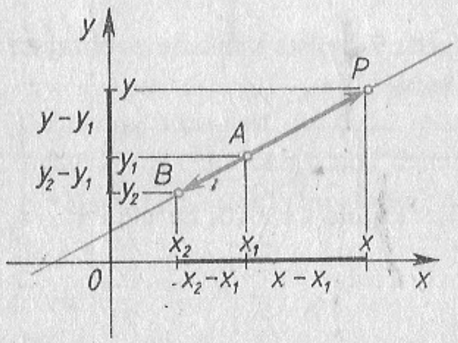
$4(x+3)=5(y-1) \Rightarrow 4x-5y+17=0$,

$4(x-2)=5(y-5) \Rightarrow 4x-5y+17=0$.

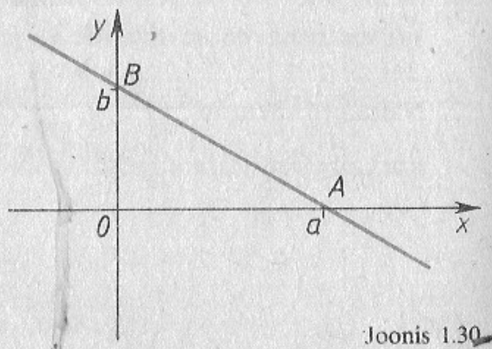
*Olgu sirge määratud punktidega, milles see sirge lõikab koordinaattelgi: $A(a; 0)$ ja $B(0; b)$ (joon. 1.30). Võrrandiks saame

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b}$$

ehk



Joonis 1.29



Joonis 1.30

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}\ .$$

V

Arve a ja b nimetatakse selle sirge **telglõikudeks** ja saadud võrrandit **sirge võrrandiks telglõikudes.** Paneme tähele, et telglõikude kaudu ei saa esitada koordinaatide alguspunkti läbiva või koordinaatteljega paralleelse sirge võrrandit. *

A.

38. Leia kahe antud punktiga määratud sirge võrrand ning esita iga sirge mõne sihivektori koordinaadid: ü

1) $A(-2; 3)$ ja $B(2;5)$;
2) $A(0; 5)$ ja $B(-1; 3)$;
3) $A(3; -1)$ ja $B(-3; -2)$;
4) $A(-3; 0)$ ja $B(5; -2)$;
5) $A\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right)$ ja $B\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$;
6) $A(2; 0)$ ja $B(0; -3)$;
7) $A\left(-\frac{13}{6}; \frac{9}{8}\right)$ ja $B\left(-\frac{25}{6}; -\frac{17}{8}\right)$;
8) $A(-5; 0)$ ja $B(0; 4)$.

B.

39. On antud punktid $A(3; 0)$, $B(0; -5)$ ja $C(-2; 1)$. Valmista vastav joonis ja leia
1) nende sirgete võrrandid, milledel asetsevad kolmnurga ABC küljed;
2) nende sirgete võrrandid, milledel asetsevad kolmnurga ABC mediaanid (juhis: lõigu keskpunkti koordinaadid avalduvad lõigu otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetiliste keskmistena);
3) kolmurga ABC ümbermõõt;
4) kolmurga külgede lõikepunktid koordinaattelgedega.

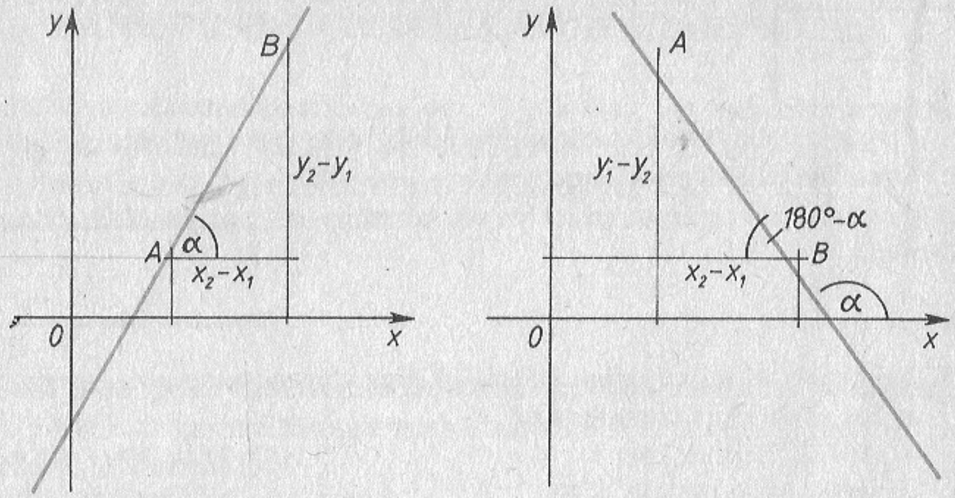
1.7. PUNKTI JA TÕUSUNURGAGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND

Kraadimõõdus antud tõusunurga seostamiseks punkti koordinaatide kui arvudega on nurka otstarbekohane iseloomustada tema tangensiga. Nagu VIII klassist teada, vastab igale nurgale $\alpha \neq 90°$, mis on väiksem kui 180°, kindel arv $\tan\alpha$. Samuti vastupidi, igale arvule vastab üks nurk vahemikust 0° kuni 180°-ni, mille tangensiks on see arv:

kui $0° \leqslant \alpha < 90°$, siis $0 \leqslant \tan\alpha < \infty$,

kui $90° < \alpha < 180°$, siis $-\infty < \tan\alpha < 0$,

kui $\alpha = 90°$, siis ei leidu talle vastavat tangensit (öeldakse ka, et $\tan 90° = \pm\infty$).



Joonis 1.31

Sirge tõusunurga α tangensit saab avaldada selle sirge punktide koordinaatide kaudu. Olgu sirge punktideks $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 1.31). Kui $\alpha < 90°$, siis

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan\alpha,$$

kui aga $90° < \alpha < 180°$, siis

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1} = -\tan(180°-\alpha) = \tan\alpha.$$

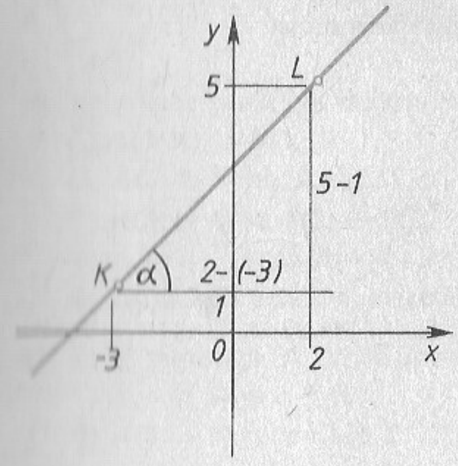
Tõusunurga tangensit nimetatakse sirge tõusuks. Tähistame sirge tõusunurka tähega α ja tõusu tähega k, siis

$$\boxed{k = \tan\alpha}.$$

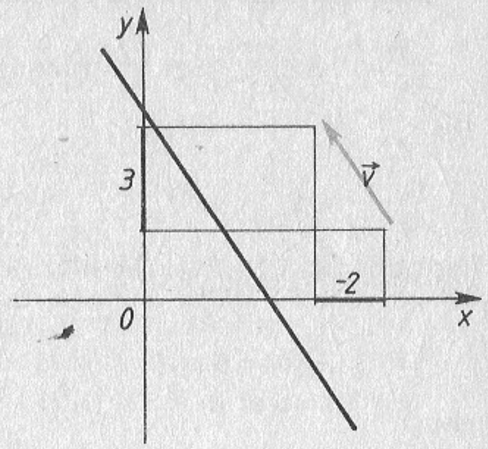
Kui sirge tõusunurk on teravnurk, siis nimetatakse sirget **tõusvaks**, nürinurga puhul aga **langevaks.**

Tõusva sirge tõus on positiivne, langeva sirge tõus aga negatiivne. Näiteks $\tan 45° = 1 > 0$, kuid $\tan 120° = -\sqrt{3} < 0$.

Kui sirge on paralleelne x-teljega, siis $\alpha = 0°$ ja $k = 0$. Kui aga sirge on paralleelne y-teljega, siis $\alpha = 90°$ ja selle sirge tõus ei ole määratud. Paneme veel tähele, et paralleelsetel sirgetel on ühesugune tõusunurk ja seega ka ühesugune tõus.



Joonis 1.32



Joonis 1.33

Nagu me jooniselt 1.31 nägime, on sirge tõus iga tõusunurga korral (välja arvatud 90°) avaldatav sirge kahe punkti koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Näide 1. Sirge on määratud punktidega $K(-3; 1)$ ja $L(2; 5)$. Selle sirge tõus on

$$K = \frac{5-1}{2+3} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Et $0{,}8 > 0$, siis antud sirge on tõusev (vt. joon. 1.32).

Kuna kahe punktiga $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ määratud sirge sihivektor on $\vec{AB} = (x_2-x_1; y_2-y_1)$, siis avaldub sirge tõus selle sirge sihivektori koordinaatide jagatisena. Kui sirge sihivektoriks on $\vec{v} = (v_1; v_2)$, siis järelikult

$$\boxed{k = \frac{v_2}{v_1}}.$$

Näide 2. Sirge sihivektor on $\vec{v} = (-2; 3)$. Selle sirge tõus $k = -\frac{3}{2} = -1{,}5 < 0$. Et $k < 0$, siis see sirge on langev (joon, 1.33).

Olgu sirge määratud punktiga $A(x_1; y_1)$ ja tõusuga k ning selle sirge mistahes punktiks olgu $P(x; y)$.

1 Lähtume kahe punktiga määratud sirge võrrandist:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

Et

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k,$$

siis võrrand omandab kuju

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

ehk

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)},$$

mis ongi punkti ja tõusuga määratud sirge võrrandiks.

Näide 3. Olgu sirge määratud punktiga $A(3;\ -5)$ ja tõusunurgaga 135°. Leiame selle sirge võrrandi.

Et $k=\tan 135°=-1$, siis sirge võrrandi saame kujul

$y+5=-(x-3) \Rightarrow y+5=-x+3.$

Paiknegu sirge antud punkt ordinaatteljel, s. t. sirge olgu määratud punktiga $B(0;\ b)$ ja tõusunurga k. Sel juhul saame sirge võrrandile kuju

$$y-b=kx$$

ehk

$$\boxed{y=kx+b},$$

mida nimetatakse **tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrandiks.**

Näide 4. Sirge on määratud tõusunurgaga $\alpha=45°$ ja punktiga $P(0;\ -3)$. Selle sirge tõus $k=\tan 45°=1$ ning sirge võrrandi saame seega esitada kujul

$$y=x-3.$$

Oleme juba VI klassis tundma õppinud lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ ja kindlaks teinud, et *lineaarfunktsiooni graafikuks on sirge.* Nüüd oleme tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrandit tuletades saanud samasuguse seose $y=kx+b$. Seega võime võrdust $y=ax+b$ nimetada nii **lineaarfunktsiooniks** kui ka **sirge võrrandiks** ehk lihtsalt **sirgeks.** Lineaarfunktsiooni valemis esinevale konstandile a oskame nüüd anda ka tõlgenduse: see on tema graafikuks oleva sirge tõus, s. t. $a=k$.

A.

1 ü

40. Leia kahe punktiga määratud sirge tõus, kui need punktid on
1) $A(3;\ 4)$ ja $B(1;\ 5)$;
2) $A(-3;\ 1)$ ja $B(-1;\ 5)$
3) $A(3;\ -4)$ ja $B(2;\ -3)$;
4) $A(-2;\ -3)$ ja $B(-4;\ -5)$.

Missugused nendest sirgetest on tõusvad, missugused langevad?

41. Leia punktiga A ja tõusunurgaga α määratud sirge võrrand, kui
1) $A(-1;\ 3)$ ja $\alpha=45°$;
2) $A(2;\ 3)$ ja $\alpha=60°$;
3) $A(4;\ -5)$ ja $\alpha=135°$;
4) $A(-3;\ -4)$ ja $\alpha=120°$.

42. Leia tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrand, kui
1) $k=\frac{1}{2}$ ja $b=-3$;
2) $k=\frac{5}{3}$ ja $b=\frac{3}{4}$;
3) $k=-3$ ja $b=5$;
4) $k=-2{,}5$ ja $b=0{,}4$.

B.

43. Valmista joonis, leia sirge tõus ja algordinaat, kui sirge võrrand on
1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}$;
2) $\frac{x+3}{-5}=\frac{y-2}{7}$.
3) $\frac{x+4}{-2}=y-5$;
4) $x-8=\frac{y-7}{2}$.

44. Leia sirge tõus ja algordinaat, kui sirge võrrand on
1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$;
2) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$;
3) $\frac{x}{-\frac{2}{3}}-\frac{y}{\frac{3}{5}}=1$;
4) $\frac{y}{5{,}4}-\frac{x}{3{,}2}=1$.

Missugused nendest sirgetest on tõusvad, missugused langevad?

1.8. SIRGE ÜLDVÕRRAND

Ükskõik missugust sirge määramisviisi me sirge võrrandi tuletamisel eespool kasutasime, ikka jõudsime võrrandini, mis sisaldab sirgel vabalt võetud punkti $P(x;\ y)$ koordinaate esimeses astmes (teatavate kordajatega) ja vabaliikmeid. Niisuguseid võrrandeid nimetatakse **lineaarvõrrandeiks.**

1 Kahe muutujaga lineaarvõrrandi üldkujuks on

V $\boxed{ax+by=c}$,

kus a, b ja c on antud arvud ning a ja b ei ole samaaegselt võrdsed nulliga. Seda võrrandit nimetatakse ka **sirge üldvõrrandiks,** sest sirge võrrandi kõik eespool leitud erikujud on teisendatavad sellisele kujule.

Näide. Teisendame punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrandi üldkujule:

$$\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}\Rightarrow v_2x-v_1y=v_2x_1-v_1y_1\ .$$

Seega vaadeldaval juhul $a=v_2$, $b=-v_1$ ja $c=v_2x_1-v_1y_1$.

Selgitame nüüd, et sirge üldvõrrandiga on tõepoolest esitatavad kõik koordinaatteljestikku joonestatavad sirged.

1) Kui sirge üldvõrrandis $ax+by=c$ kordaja $b=0$, siis on see võrrand y-teljega paralleelse sirge võrrand:

$$ax=c\Rightarrow x=\frac{c}{a}\ .$$

2) Kui sirge üldvõrrandis kordaja b on nullist erinev, siis saab üldvõrrandi teisendada näiteks tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrandi kujule:

$$ax+by=c\Rightarrow by=-ax+c\Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}\ .$$

Et kõik y-teljega mitteparalleelsed sirged saab esitada kujul $y=kx+b$, siis ongi sirge üldvõrrandiga hõlmatud kõik koordinaatteljestikus esitatavad sirged.

Sirge võrrandis võib liikmeid vajaduse korral ümber tõsta. Näiteks võrrandid

$-x+2y=-3$ ja $2y-x+3=0$

on samaväärsed. Seda arvestades nimetatakse mõnikord sirge üldvõrrandiks ka võrrandit kujul

$ax+by+c=0$.

A.

1 ü

45. Teisenda järgmised võrrandid üldkujulisteks:

1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}$; 2) $\frac{x+1}{-4}=\frac{y}{-3}$;

3) $y-3=2(x+1)$; 4) $y+5=\frac{1}{2}(x-4)$.

46. Teisenda järgmised üldkujulised võrrandid tõusu ja algordinaadiga määratud võrranditeks ning valmista joonis:

1) $2x-3y+1=0$; 2) $-3x+5y+15=0$;

3) $4x+6y+9=0$; 4) $-x-y+5=0$.

B.

47. Teisenda eelmises ülesandes antud üldkujulised võrrandid

1) punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrranditeks;

2) kahe punktiga määratud sirge võrranditeks (juhis: leia proovimise teel kaks sirgel asetsevat punkti);

3) sirge võrranditeks telglõikudes;

4) punkti ja tõusuga määratud sirge võrranditeks.

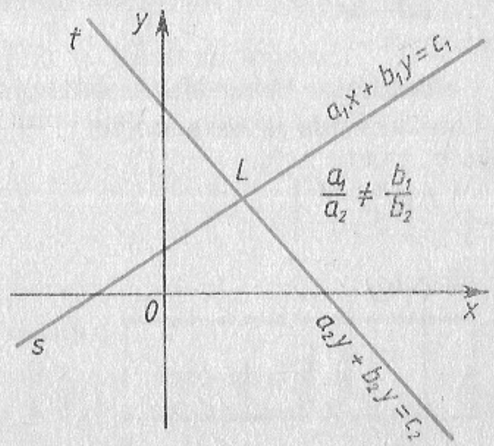
1.9. KAHE SIRGE LÕIKEPUNKT

Olgu kaks lõikuvat sirget s ja t (joon. 1.34) antud oma üldvõrranditega

$a_1x+b_1y=c_1$ ja $a_2x+b_2y=c_2$.

Nende sirgete lõikepunkti L koordinaadid peavad rahuldama mõlemat võrrandit. Seega on nad lahendiks võrrandisüsteemile:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$



Joonis 1.34

1 Lõikepunkti koordinaatide leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi liitmisvõtte abil. Tundmatu y elimineerimiseks korrutame esimest võrrandit b_2-ga ja teist võrrandit b_1-ga (eeldusel, et $b_1 \neq 0$ ja $b_2 \neq 0$):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1. \end{cases}$$

Lahutades nüüd esimesest võrrandist teise saame

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Et me vaatleme lõikuvaid sirgeid, siis on süsteemil lahend olemas. Seega peab olema täidetud tingimus $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ja saadud võrdusest võime avaldada tundmatu x:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Juhul, kui kas $b_1 = 0$ või $b_2 = 0$, on tundmatu x vastavast võrrandist kohe leitav ning avaldub samal kujul. Tõepoolest, näiteks juhul $b_1 = 0$ on ka $c_2b_1 = a_2b_1 = 0$ ja esimesest võrrandist saame

$$x = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_1b_2}{a_1b_2} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Korrutades antud süsteemi võrrandeid vastavalt nullist erinevate arvudega a_2 ja a_1 jõuame analoogilise mõttekäiguga tulemusele, et

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Juhul, kui kas $a_1 = 0$ või $a_2 = 0$ on tundmatu y vastavast võrrandist kohe leitav (*põhjenda, et y avaldis jääb samaks!*).

m **Avaldist kujul**
ad − bc

nimetatakse kaherealiseks determinandiks ja kirjutatakse tabelina, milles on kaks *rida* ja kaks *veergu*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Niisiis:

v $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Lineaarvõrrandisüsteemi lahend, s. o. süsteemi rahuldav arvupaar kooseneb, nagu selgus, kaherealiste determinantide jagatisest: 1 v

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ja } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Nimetajas olevat determinanti nimetatakse antud **lineaarvõrrandisüsteemi determinandiks** ehk lühemalt **süsteemi determinandiks** ja tähistatakse kreeka tähestiku tähega Δ (loe: *suur delta*). Lõikepunkti olemasolu tingimuse võib nüüd kirjutada kujul $\Delta \neq 0$. m

Näide. Sirgete $2x - y - 3 = 0$ ja $x + 2y - 4 = 0$ lõikepunkti leidmiseks moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Et siin

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0,$$

siis on sirgetel lõikepunkt olemas. Leiame lõikepunkti koordinaadid:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6+4}{5} = 2$$

ja

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{8-3}{5} = 1.$$

Seega antud sirged lõikuvad punktis $L(2; 1)$. *Kontrolli joonisel!*

A.

48. Arvuta kaherealise determinandi väärtus: ü

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -3{,}2 & 1{,}3 \\ 1{,}5 & -4{,}7 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} -7 & \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{7} \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 13{,}6 & -15{,}4 \\ 18{,}3 & 9{,}16 \end{vmatrix}$.

49. Lahenda võrrandisüsteemid determinantide abil:

1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ x-y=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 10x-y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x+y-3=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ x+y-1=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x+5y-12=0 \\ 3x-3y-8=0. \end{cases}$

50. Joonesta sirged ning leia nende lõikepunkt, kui sirged on antud võrranditega

1) $y=3x-2$ ja $y=-2x+1$;

2) $y-3=\frac{1}{2}(x-4)$ ja $y+2=\frac{3}{2}(x-2)$;

3) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{2}$ jä $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}$

4) $2x+3y-5=0$ ja $-x+2y+1=0$.

B.

51. Lihtsusta ja seejärel lahenda saadud võrrandisüsteem nii determinantide abil kui ka determinante kasutamata:

1) $\begin{cases} \frac{3x-y}{3}-x+y=\frac{x-y}{5}-1 \\ \frac{2y+x}{2}-\frac{2(x-y)}{5}=y-x-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{x+5y}{2}=\frac{y}{5}-4\frac{4}{5} \\ \frac{x-y}{2}=x+2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-\frac{5x-3y}{3}=\frac{3x-2y}{5}-1 \\ y-\frac{4x-3y}{2}=\frac{2x-3y}{3}-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-3y}{4}-2x=-7-\frac{y+5}{3} \\ \frac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y. \end{cases}$

1.10. KAKS PARALLEELSET SIRGET, KAKS ÜHTIVAT SIRGET

1

* Kaks tasandil asetsevat sirget võivad kas lõikuda, olla paralleelsed või ühtida (joon. 1.35). Eespool veendusime, et kui sirged võrranditega

$a_1x+b_1y=c_1$ ja $a_2x+b_2y=c_2$

lõikuvad ühes punktis, siis

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1 \neq 0.$$

Teisendame antud sirgete võrrandid tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrandi kujule:

$$a_1x+b_1y=c_1 \Rightarrow y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1},$$

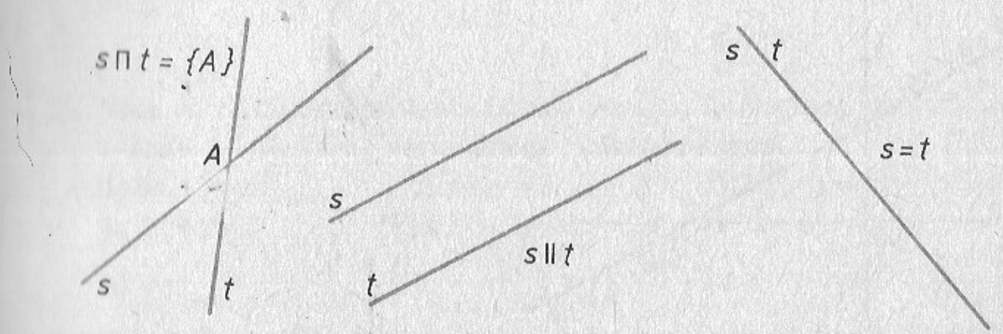
$$a_2x+b_2y=c_2 \Rightarrow y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}.$$

Kui sirged on kas paralleelsed või ühtivad, siis nende tõusunurgad ja seega ka tõusud peavad olema võrdsed, s. t.

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$$

ehk

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$



Joonis 1.35

1 Seega on tingimus $\Delta \neq 0$ täidetud ainult sel juhul, kui sirged lõikuvad. Oleme tõestanud järgmise ***teoreemi*:**

Kaks sirget $a_1x+b_1y=c_1$ ja $a_2x+b_2y=c_2$ lõikuvad siis ja ainult siis, kui $\Delta \neq 0$.

Selgitame veel, kuidas määrata sirgete võrrandite kordajate järgi nende sirgete vastastikust asendit.

Lõikumise korral

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$ (vt. joon. 1.34),

s. t. sirgete võrrandites vastavate muutujate kordajad ei ole võrdelised.

Paralleelsuse ja ühtimise korral

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

s. t. sirgete võrrandites vastavate muutujate kordajad on võrdelised.

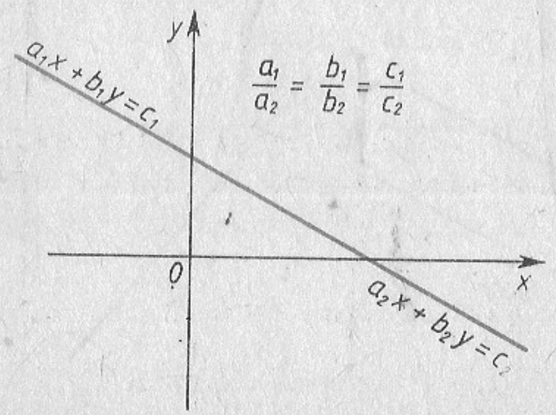
Et ühtimise korral peavad sirgete võrrandid olema ekvivalentsed, siis:

ühtimise korral: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (joon. 1.36),

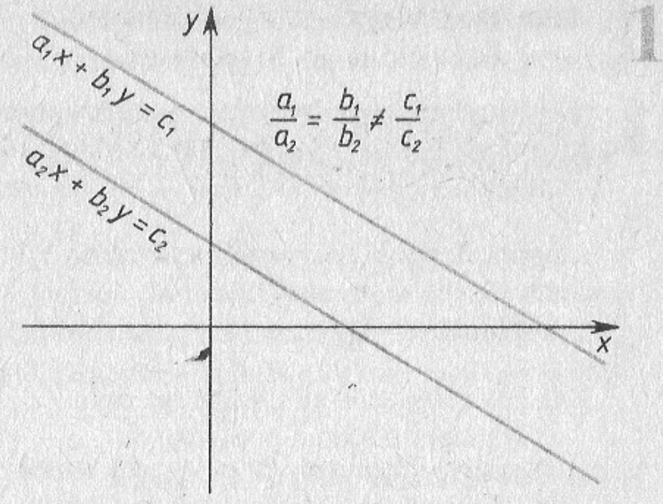
paralleelsuse korral: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (joon. 1.37).

Näide 1. Sirgete $x-3y-1=0$ ja $2x-6y+3=0$ vastastikuse asendi selgitamiseks moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=-3. \end{cases}$$



Joonis 1.36



Joonis 1.37

Et siin

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=-6+6=0,$$

siis antud sirged ei lõiku. Kordajate võrdlemine annab $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{1}{-3}$, millest järeldub, et need sirged on paralleelsed ja seega ühist punkti pole neil olemas.

Näide 2. Sirgete $x-3y=2$ ja $2x-6y=4$ vastastikuse asendi selgitamisel saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=4. \end{cases}$$

Siin $\Delta=0$ (vt. eelmine näide), kusjuures $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}=\frac{2}{4}$.

Sel juhul sirged ühtivad ja antud süsteemil on lõpmata palju lahendeid, s. t. sirgetel on lõpmata palju ühiseid punkte. Pole raske veenduda, et selle süsteemi teine võrrand on saadud esimesest 2-ga korrutamise teel. *

A.

52. Ilma võrrandisüsteemi lahendamata otsusta, missuguses vastastikuses asendis on järgmiste võrranditega määratud sirged:

1) $3x-y=5$ ja $2x+y=1$;
2) $x+y=5$ ja $2x+2y=3$;
3) $2x-3y=4$ ja $4x-6y=8$;
4) $y=\frac{3}{4}x-5$ ja $y=\frac{6}{8}x+1$;
5) $y=-\frac{1}{2}x+1$ ja $2y=-x+2$;
6) $y=-3x-2$ ja $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$.

53. Kirjelda järgmiste sirgete asendit koordinaatteljestikus:

1) $y=2x-3$;
2) $y=-3x+5$;
3) $y=x$;
4) $y=-x$;
5) $y=3$;
6) $x=-4$;
7) $y-3=2(x+1)$;
8) $y+2=-0,5(x-5)$;
9) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}$;
10) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{4}$.

54. Esita sirge võrrand, kui sirge on

1) määratud kahe punktiga;
2) määratud punkti ja tõusuga;
3) määratud punkti ja sihivektoriga;
4) paralleelne x-teljega;
5) koordinaatteljestikus I ja III veerandi poolitajaks;
6) risti x-teljega;
7) määratud teljelõikudega;
8) määratud tõusu ja algordinaadiga.

55. Mis on kaherealine determinant?

56. Arvuta determinandi väärtus:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$;
2) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-5}{6} \\ \frac{-3}{10} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$;
3) $\begin{vmatrix} 12,3 & -16,4 \\ 3,27 & -0,86 \end{vmatrix}$

57. Määra kahe sirge vastastikune asend ning leia lõikumise korral lõikepunkti koordinaadid, kui sirgete võrrandid on

1) $x+2y=3$ ja $-3x+4y=1$;
2) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}$ ja $y=1,5x+1$;
3) $x-1=\frac{y+1}{2}$ ja $y-2=-0,25(x+2)$;
4) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-4}$ ja $4x+3y=-5$.

Kontrolli tulemust joonisel!

Järgnevalt tuletame meelde ülesannete lahendamist lineaarvõrrandisüsteemi koostamise abil. Saadud võrrandisüsteemide lahendamiseks kasuta kõiki Sulle tuttavaid lahendusvõtteid: asendusvõtet, liitmisvõtet ja lahendamist determinantide abil.

58. Otsitava kahekohalise arvu ristsumma on 13. Kui selles arvus numbrid vahetada, siis saame arvu, mis on esialgsest arvust 45 võrra suurem. Leia otsitav arv.

59. Leia trapetsi alused, kui kesklõik on 9 cm ja üks alus on teisest 3,6 cm võrra pikem.

60. Klassi ühele õpilasele tehti ülesandeks osta suusamatkale minekuks kaasa 5 kg suhkrut ja 3 kg riisi. Talle anti ostuks paras raha 6 rubla ja 60 kopikat. Eksikombel ostis ta aga 5 kg riisi ja 3 kg suhkrut ning sai kassast 8 kopikat tagasi. Kui palju maksis kilo suhkrut ja kui palju kilo riisi?

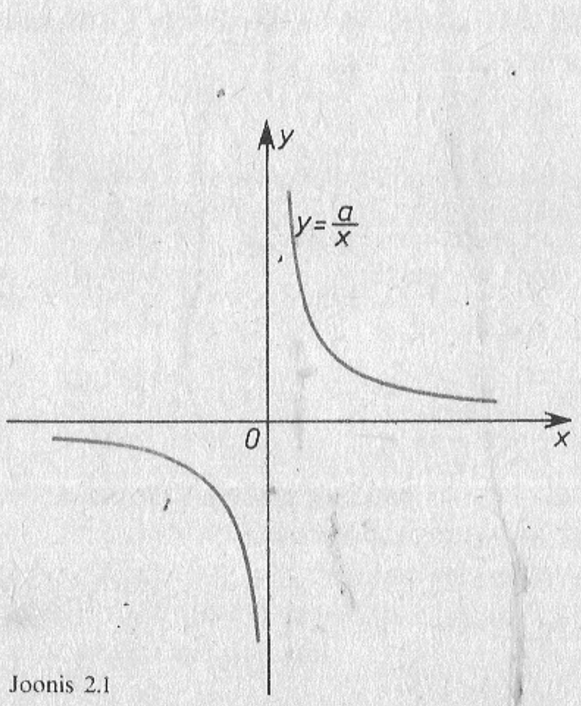
61. Kui murru lugejat suurendada ühe võrra ja nimetajat vähendada ühe võrra, siis saame 1. Kui murru lugejat vähendada ühe võrra ja nimetajat suurendada kolme võrra, siis saame $\frac{1}{4}$. Leia see murd.

62. Kui mitu kilogrammi tuleb võtta puhast vaske ja mitu kilogrammi 45-protsendilise vasesisaldusega pronksi, et nende kokkusulatamisel saada 50 kg pronksi, milles on 50 % vaske?

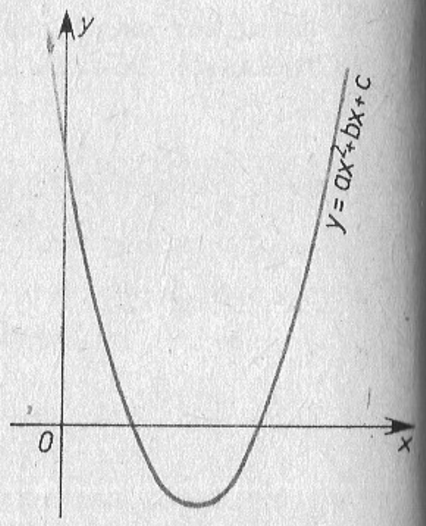
63. Muul ja eesel sammusid raskesti koormatult turule. Muul kurtis oma seltsilisele: «Kui sina annaksid minule 1 mõõdu oma koormast, saaks minu koorem sinu omast kaks korda suuremaks; kui mina annaksin omast ühe mõõdu sinule, oleks meil võrdpalju kanda.» (Ülesanne Aleksandria ülikoolist ca 300 aastat e.m.a.)

2. JOONE VÕRRAND

Lisaks sirgele oleme nooremates klassides tuttavaks saanud veel mõningate joontega. VI klassis joonestasime pöördvõrdelise seose $y=\frac{a}{x}$ graafiku (joon. 2.1). Seda joont nimetatakse **hüperbooliks.** VII klassis tutvusime ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafiku — **parabooliga** (joon. 2.2).



Joonis 2.1



Joonis 2.2

2.1. JOONE VÕRRANDI MÕISTE

2

Sirge võrrandit käsitledes jõudsime selgusele, et lineaarfunktsiooni määrav seos $y=ax+b$ kujutab ühtlasi teatava sirge võrrandit. Samas mõttes võime hüperbooli võrrandiks lugeda pöördvõrdelist sõltuvust määrava seose $y=\frac{a}{x}$ (kus a on nullist erinev konstant) ja parabooli võrrandiks ruutfunktsiooni määrava seose $y=ax^2+bx+c$ (kus a, b ja c on konstandid ning $a\neq 0$).

Sirge võrrandit tuletades rõhutasime, et seda võrrandit peavad rahuldama vaadeldava sirge kõigi punktide koordinaadid ja ainult need. See nõue kehtib ka hüperbooli, parabooli ning kõigi teiste joonte võrrandite puhul.

Niisiis, **joone võrrandiks nimetatakse võrrandina esitatavat seost joone mis tahes punkti koordinaatide vahel, mida rahuldavad selle joone kõikide punktide koordinaadid ja ainult need.**

m

Näide. Selgitame, kas punktid $A(-5;\ -4)$ ja $B(3;\ 1)$ asetsevad võrrandiga $x^2-y^2=9$ määratud joonel.

Punkti A koordinaadid rahuldavad antud võrrandit, sest $(-5)^2-(-4)^2=25-16=9$. Punkti B koordinaadid seda võrrandit ei rahulda, sest $3^2-1^2=9-1=8\neq 9$. Seega punkt A asetseb vaadeldaval joonel, punkt B aga mitte.

A.

64. On antud punktid $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 3)$, $D(-1;\ 3)$ ja $E(-2;\ -3)$. Missugused nendest punktidest asetsevad ja missugused ei asetse sirgel $y=2x+1$?

ü

65. Kas punktid $P(0;\ 5)$, $Q(-2;\ 3)$ ja $R(1;\ 1{,}5)$ asetsevad joonel, mille võrrandiks on $2x^2-3xy+y-5=0$?

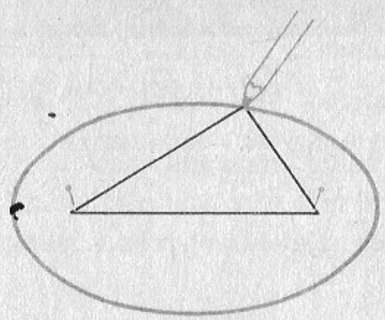
66. Kas joon võrrandiga $x^2+4y^2-2(x+y)-6=0$ läbib punkte $A(2;\ -1)$, $B(1;\ -5)$, $C(-1;\ -6)$?

67. On antud joon funktsiooni $y=x^3-3x$ graafikuna. Leia kolm sellel joonel asetsevat ja kolm sellel joonel mitteasetsevat punkti.

68. On antud joon funktsiooni $y=x^4-3x^3+3$ graafikuna. Leia kolm sellel joonel asetsevat ja kolm sellel joonel mitteasetsevat punkti.

69. Joonesta vihikusse kaks punkti $A(-3;\ 0)$ ja $B(3;\ 0)$. Nüüd joonesta nende punktide kui keskpunktide ümber ringjooned raadiusega 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8 ühikut. Märgi ristikestega punktid, kus lõikuvad ringjooned, mille raadiuste summa on 10 ühikut. Mitu ühist punkti on neil ringjoontel? Ühenda saadud punktid sujuva joonega. Kuidas nimetatakse saadud joont?

70. Märgi tahvlil või vihikulehel kaks punkti nõeltega. Võta kinnine nöör ning aseta see ümber nõelte (joon. 2.3). Tõmba nüüd kriidiga või pliiatsiga see nöör pingule ja tõmba joon. Mis joone sa said? Kuidas saaks defineerida ellipsit?



Joonis 2.3

71. Joonesta vihikusse kaks punkti $A(-3;\ 0)$ ja $B(3;\ 0)$ ja nende punktide kui keskpunktide ümber kümme ringjoont nii, et ringjoonte raadiuste vahe oleks alati 4 ühikut. Näiteks, kui ühe punkti ümber tõmbad ringjoone raadiusega 6 ühikut, siis teise ümber ringjoone raadiusega 2 ühikut jne. Märgi punktid, kus need ringjooned lõikuvad. Ühenda saadud punktid sujuva joonega. Kuidas nimetatakse saadud joont? Kuidas saaks defineerida hüperbooli?

72. Joonesta vihikusse sirge $y=-3$ ja punkt $F(0;\ 3)$. Märgi samal joonisel sirkli abil vähemalt kümme punkti, mis kõik asetseksid antud sirgest ja antud punktist samal kaugusel. Ühenda need punktid sujuva joonega. Kuidas nimetatakse saadud joont? Kuidas saaks defineerida parabooli?

2.2. RINGJOONE VÕRRAND

Ringjooneks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kaugused ühest kindlast punktist on võrdsed.

Seda kindlat punkti nimetatakse **ringjoone keskpunktiks** ja võrdset kaugust **ringjoone raadiuseks.**[1]

Olgu punkt $K(k_1;\ k_2)$ ringjoone keskpunkt ning raadiuseks r (joon. 2.4). Selle ringjoone mis tahes punkt olgu $P(x;\ y)$. Vastavalt ringjoone definitsioonile on $KP=r$, seega $(KP)^2=r^2$ ehk

$$(x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2$$

V

See võrrand seob ringjoone mis tahes punkti P koordinaate x ja y, kusjuures ühegi ringjoonel mitte oleva punkti koordinaadid seda võrrandit ei rahulda. Seetõtu nimetataksegi teda **ringjoone võrrandiks,** vahel ka **ringjoone kanooniliseks võrrandiks.**

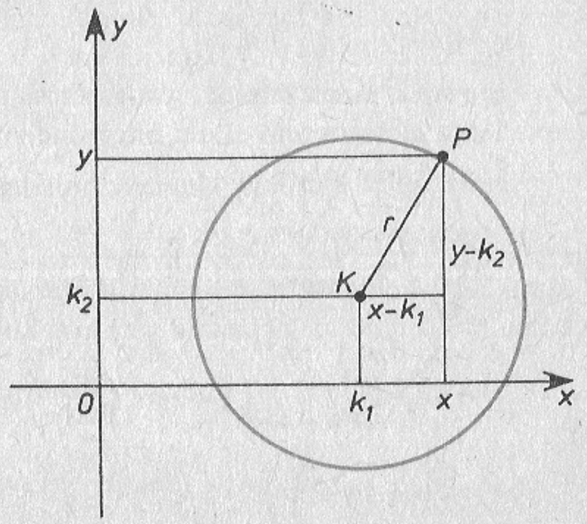
* Teisendame seda võrrandit. Esmalt avame sulud:

$$x^2-2k_1x+k_1^2+y^2-2k_2y+k_2^2=r^2.$$

Nüüd liikmeid ümber paigutades saame võrrandi

$$x^2+y^2-2k_1x-2k_2y+k_1^2+k_2^2-r^2=0.$$

[1] Ringjoone raadiuseks nimetatakse sageli ka lõiku, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga. Teksti järgi on alati võimalik aru saada, kas raadius tähendab lõiku või selle pikkust.



Joonis 2.4

Tähistades siin

$$-2k_1=d \quad -2k_2=e, \quad \text{ja} \quad k_1^2+k_2^2-r^2=f,$$

teiseneb ringjoone võrrand kujule

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0.$$

Küsime nüüd, kas iga võrrand kujul

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

osutub ringjoone võrrandiks? Sellele küsimusele vastamiseks püüame võrrandi teisendada kanoonilisele kujule. Kui see õnnestub, siis on tulemusest välja loetavad ringjoone keskpunkti koordinaadid ja raadius, s. t. sel juhul osutub antud võrrand tõepoolest ringjoone võrrandiks.

Näide 1. Selgitame, kas võrrand

$$x^2+y^2+4x-2y-44=0$$

on ringjoone võrrand. Kui vastavalt kanoonilisele võrrandile eraldada siin täisruudud, siis

$$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=44+4+1,$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=49.$$

Seega antud võrrand esitab ringjoont keskpunktiga $K(-2;\ 1)$ ja raadiusega 7 ühikut.

Näide 2. Selgitame, kas võrrand

$$x^2+y^2-8x+10y+45=0$$

on ringjoone võrrand. Kui jälle eraldada täisruudud, saame võrrandile kuju

$$(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25)=-45+16+25,$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=-4.$$

See võrdus ei saa kehtida, sest võrrandi paremaks pooleks on negatiivne arv. Seega lähtevõrrand ei ole ringjoone võrrand.

Teeme nüüd üldjuhul kindlaks, missugust tingimust peavad võrrandi

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

kordajad rahuldama, et see võrrand oleks ringjoone võrrand. Selleks eraldame täisruudud ja kirjutame võrrandi kujul

$$\left(x^2+dx+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+ey+\left(\frac{e}{2}\right)^2\right)=-f+\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f.$$

Siit selgubki, et antud võrrand osutub ringjoone võrrandiks ainult siis, kui

$\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f>0$, kusjuures see ringjoon on keskpunktiga $K\left(-\frac{d}{2};\ -\frac{e}{2}\right)$ ja raadiusega $r=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f}$.

Esimese näite korral $\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f=4+1+44=49>0$, teise näite korral aga $\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f=16+25-45=-4<0$.

Juhul, kui $\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-f=0$, s. t. kui kanoonilisele kujule viimisel osutub, et $r=0$, on kidunud üheksainsaks punktiks $K\left(-\frac{d}{2};\ -\frac{e}{2}\right)$.

Näide 3. Koostame ringjoone võrrandi, kui on teada, et tema keskpunkt on punktis $O'(-2;\ -3)$ ja raadius on 4. Nende andmete järgi saab kohe üles kirjutada ringjoone kanoonilise võrrandi:

$$(x-2)^2+(y+3)^3=16.$$

Näide 4. On antud võrrand

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0.$$

Näitame, et see on ühe ringjoone võrrand ning leiame selle ringjoone keskpunkti K koordinaadid, raadiuse r, ringjoone pikkuse c ja ringi pindala S. Selleks teisendame antud võrrandi kanoonilisele kujule:

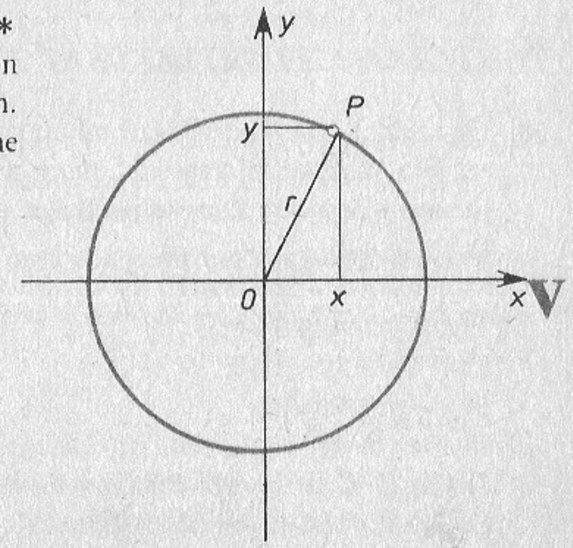
$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=$$

$$=4+4+1\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=9.$$

Seega, keskpunktiks on punkt $K(2;\ -1)$, $r=3$, $c=6\pi$ ja $S=9\pi$.*

Kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguspunktis 0 (joon. 2.5), siis $k_1=k_2=0$ ja ringjoone võrrand omandab kuju

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$



Joonis 2.5

2A.

ü 73. Leia ringjoone raadius, kui selle ringjoone võrrand on
1) $x^2+y^2=121$; 2) $x^2+y^2=0{,}81$;
3) $x^2+y^2=\frac{169}{289}$; 4) $2x^2+2y^2=288$.

74. Leia ringjoone pikkus ja ringi pindala, kui ringjoone võrrand on
1) $x^2+y^2=9$; 2) $x^2+y^2=0{,}36$;
3) $x^2+y^2=\frac{16}{25}$; 4) $3x^2+3y^2=675$.

75. Esita ringjoone võrrand, kui on antud keskpunkt K ja raadius r:
1) $K(1;\ 3)$ ja $r=5$; 2) $K(-3;\ 8)$ ja $r=12$;
3) $K\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{3}\right)$ ja $r=\left(\frac{11}{13}\right)$; 4) $K(2{,}3;\ -4{,}5)$ ja $r=\sqrt{30}$;
5) $K\left(\frac{2}{5};\ -\frac{1}{6}\right)$ ja $r=64\frac{1}{4}$; 6) $K(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ ja $r=\sqrt{3}$.

76. Esita ringjoone kanooniline võrrand juhul, kui keskpunkt asetseb
1) x-teljel;
2) y-teljel;
3) koordinaatide alguspunktis.

77. Leia ringjoone võrrand, kui
1) keskpunkt on $K(2;\ 3)$ ja $c=8\ \pi$;
2) keskpunkt on $K(-3;\ -1)$ ja $c=12\ \pi$;
3) keskpunkt on $K(0;\ 2)$ ja $S=25\ \pi$;
4) keskpunkt on $K(-5;\ 0)$ ja $S=1{,}21\ \pi$.

B.

78. Tee kindlaks, kas antud võrrand on ringjoone võrrand. Ringjoone korral leia keskpunkt, raadius, ringjoone pikkus ja ringi pindala ning joonesta ringjoon koos teljestikuga endale vihikusse:
1) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$;
2) $x^2+y^2-x-5y+3=0$;
3) $x^2+y^2-4x+3=0$;
4) $x^2+y^2+5y-2=0$;
5) $x^2+y^2+6x=0$;
6) $x^2+y^2-4y=0$;
7) $x^2+y^2-2x+5y+9=0$;
8) $x^2+y^2-16x-20y+169=0$.

79. On antud ringjoon võrrandiga
$x^2+y^2-10x-2y+1=0$
ja punktid $A(5;\ 1)$, $B(8;\ 5)$, $C(3;\ 4)$, $D(5;\ 8)$, $E(4;\ 3)$, $F(1;\ 5)$.
Missugused nendest punktidest asetsevad
1) väljaspool ringi?
2) ringi sees?
3) ringjoonel?

80. On antud ringjoon võrrandiga
$x^2+y^2+4x+8y=44$.
Leia niisuguse ringjoone võrrand, mille keskpunkt ühtib antud ringjoone keskpuntiga ning mis läbib punkti
1) $A(0;\ 0)$; 2) $B(2;\ 4)$; 3) $C(4;\ 2)$; 4) $D(-2;\ 0)$.

81. On antud ringjooned võrranditega
$x^2+y^2-2x-80=0$ ja $x^2+y^2+4y-45=0$.
Leia
1) nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus;
2) nende keskpunkte läbiva sirge võrrand;
3) selle sirge ja antud ringjoonte lõikepunktid.

82. On antud ringjooned võrranditega
$x^2+y^2+6x+2y-6=0$ ja $x^2+y^2-4x=0$.
Leia
1) nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus;
2) neid keskpunkte läbiva sirge võrrand;
3) nende ringjoonte lõikepunktid.

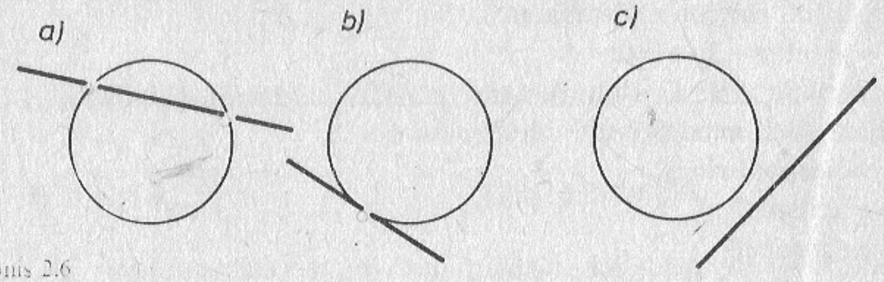
2.3. SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUSED ASENDID

Sirge kas lõikab ringjoont kahes punktis (joon. 2.6, *a*), on ringjoone puutujaks, s. t. tal on ringjoonega üksainus ühine punkt (joon. 2.6, *b*), või ei lõiku ringjoonega (joon. 2.6, *c*).

Kui sirge ja ringjoon on antud oma võrranditega, siis selgub nende vastastikune asend võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ax+by=c \\ (x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2 \end{cases}$$

lahendamisel. Sellel süsteemil on sirge ja ringjoone vastastikuste eri asendite puhul kas kaks lahendit, üks lahend või lahend puudub. Niisuguse võrrandisüsteemi lahendamiseks on kõige sobivam kasutada asendusmeetodit.



Joonis 2.6

Näide 1. Selgitame, missugune on sirge $3x-y+1=0$ ja ringjoone $x^2+y^2=5$ vastastikune asend. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Kõigepealt avaldame esimesest võrrandist näiteks tundmatu y:

$y=3x+1$.

Teeme siit asenduse teise võrrandisse ja lihtsustame saadud võrrandit:

$x^2+(3x+1)^2=5 \Rightarrow x^2+9x^2+6x+1=5 \Rightarrow 10x^2+6x-4=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+3x-2=0.$

Ruutvõrrandi lahendivalemit kasutades leiame x-i väärtused:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{10}=\frac{-3\pm 7}{10} \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=0{,}4.$$

Vastavad y-i väärtused on: $y_1=-2$; $y_2=2{,}2$. Antud sirge ja ringjoon lõikuvad seega punktides $L_1(-1;\ -2)$ ja $L_2(0{,}4;\ 2{,}2)$ (joon. 2.7). *Kontrolli!*

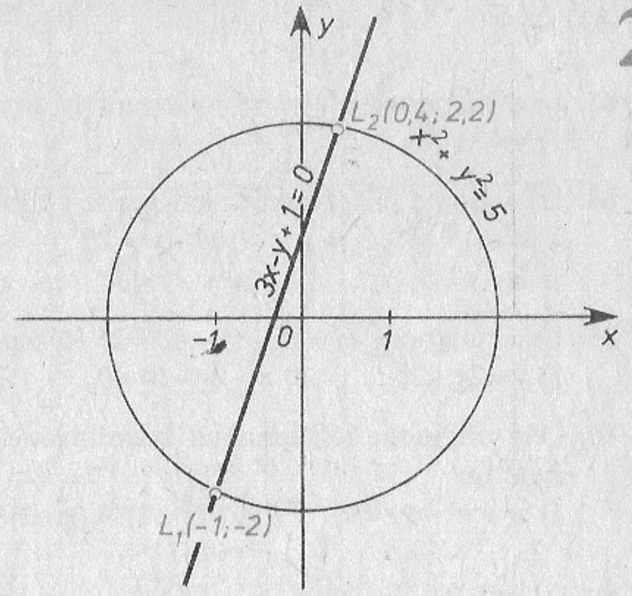
Näide 2. Leiame ringjoone $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ lõikepunktid sirgetega $y=x+4$ ja $y=x-4$. Kahe joone lõikepunkt asetseb mõlemal joonel ja tema koordinaadid peavad seega rahuldama mõlema joone võrrandit. Seepärast tulevadki otsitavate lõikepunktide koordinaatide leidmiseks lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=13 \\ y=x+4 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=13 \\ y=x-4. \end{cases}$$

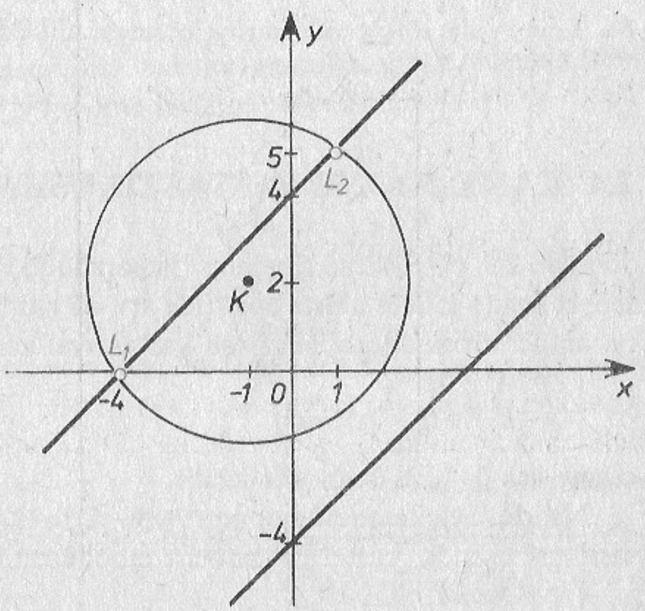
Asendusvõtet kasutades jõuame ruutvõrranditeni tundmatu x suhtes:

$x^2+3x-4=0$ ja $x^2-5x+11=0$.

Esimese võrrandi lahenditeks on $x_1=-4$ ja $x_2=1$. Teisel võrrandil lahendid puuduvad. Võrrandist $y=x+4$ leiame esimese sirge ja ringjoone lõike-



Joonis 2.7



Joonis 2.8

punktide ordinaadid $y_1=0$ ja $y_2=5$. Seega ringjoon $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ lõikub sirgega $y=x+4$ punktides $L_1(-4;\ 0)$ ja $L_2(1;\ 5)$, kuid sirgega $y=x-4$ see ringjoon ei lõiku (joon. 2.8). *Kontrolli!*

2 A.

83. Leia ringjoone $x^2+y^2=5$ lõikepunktid sirgega
1) $y=3x+1$; 2) $x-y+4=0$.

84. Leia joonte lõikepunktid, kui nende võrrandid on
1) $x^2+y^2=13$ ja $x+y=5$; 2) $x^2+y^2=29$ ja $x-y=3$; 3) $x^2+y^2=20$ ja $x+y=2$.

85. Leia ringjoone $(x+1)^2+(y-4)^2=25$ lõikepunktid sirgega
1) $y=2x+2$; 2) $x+2y-14=0$.

86. Leia ringjoone lõikepunktid koordinaattelgedega, kui ringjoone võrrand on
1) $x^2+y^2-4y=0$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=20$.

B.

87. Leia ringjoone kõõlu pikkus, kui ringjoone võrrand on $x^2+y^2-4x+2=0$ ja kõõlu sirge võrrand on $y=1$.

88. Leia y-telje lõikepunktid ringjoonega, mille diameetri otspunktideks on $A(-1;\ 1)$ ja $B(-2;\ -3)$.

2.4. KAHE JOONE VASTASTIKUSED ASENDID

Joonisel 2.9. on esitatud ringjoone ja parabooli vastastikused asendid. Näeme, et nende joonte ühiste punktide arv on kas 0, 1, 2, 3 või 4. Kui jooned on antud võrranditega, siis peab ka vastaval võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ (x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2 \end{cases}$$

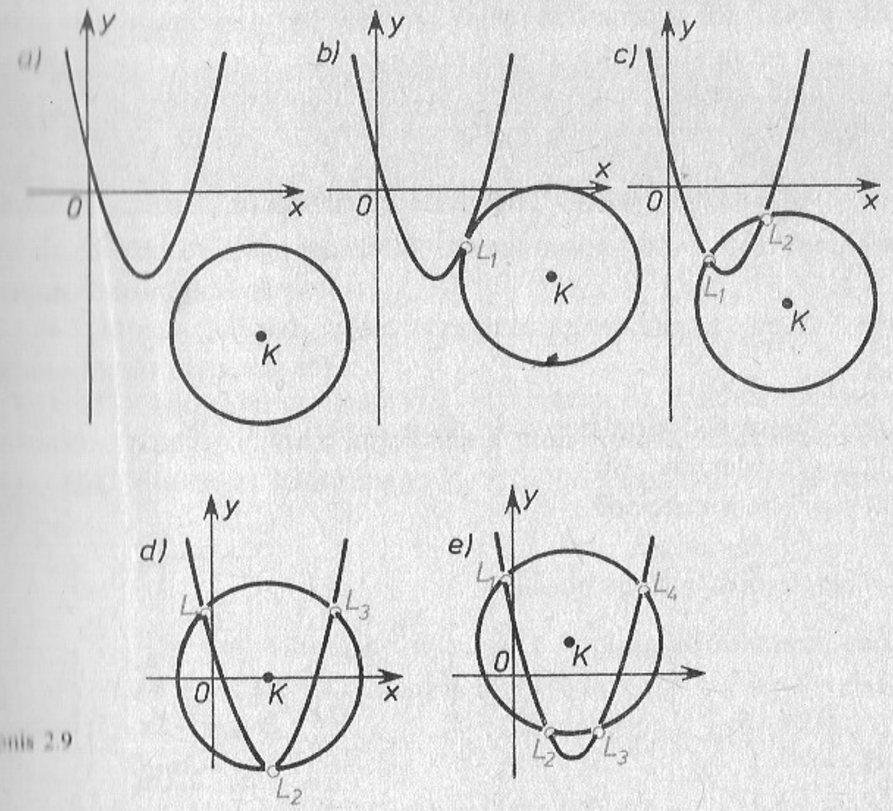
olema kas 0, 1, 2, 3 või 4 lahendit.

Näide. Selgitame ringjoone $x^2+(y-2)^2=13$ ja parabooli $y=x^2-5$ vastastikuse asendi. Antud võrrandeist moodustatud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=13 \\ y=x^2-5 \end{cases}$$

lahendamiseks kasutame asendusmeetodit:

$$x^2+(x^2-7)^2=13 \Rightarrow x^4-13x^2+36=0.$$

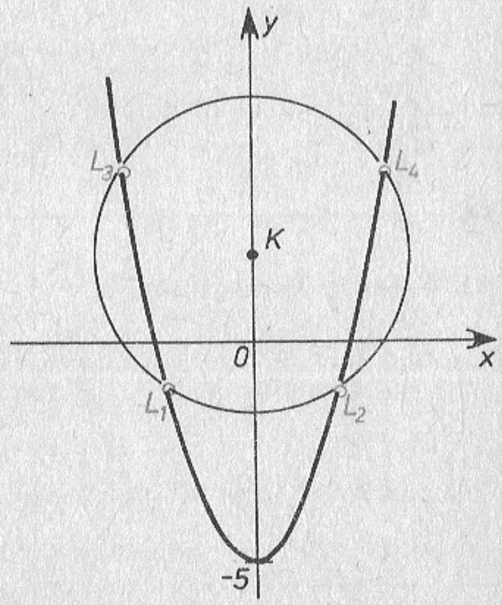


Joonis 2.9

Saadud võrrandit nimetatakse **biruutvõrrandiks.** Selle lahendamisel kasutame asendust $x^2=z$. Nii saame tavalise ruutvõrrandi

$$z^2-13z+36=0,$$

mille lahenditeks on $z_1=4$ ja $z_2=9$.



Joonis 2.10

Et $x^2=z$, siis võrrandist $x^2=4$ saame biruutvõrrandi lahenditeks $x_1=-2$, $x_2=2$ ja võrrandist $x^2=9$ lisanduvad veel $x_3=-3$, $x_4=3$. Vastavad y-i väärtused leiame võrrandist $y=x^2-5$. Niisiis, antud ringjoon ja parabool lõikuvad neljas punktis: $L_1(-2;\ -1)$, $L_2(2;\ -1)$, $L_3(-3;\ 4)$ ja $L_4(4;\ 4)$ (joon. 2.10). *Kontrolli!*

A.

ü **89.** Tee joonise abil kindlaks, mitu ühist punkti võib olla
1) sirgel ja paraboolil;
2) sirgel ja hüperboolil;
3) kahel ringjoonel;
4) ringjoonel ja hüperboolil.

90. Leia joonte lõikepunktid, kui joonte võrrandid on

1) $y=x-4$ ja $y=2x+5$;	2) $y=-3x+2$ ja $y=2x-3$;	3) $y=-x+5$ ja $y=-2x-7$;
4) $y=x^2$ ja $y=6-x$;	5) $y=x^2-8$ ja $y=x+2$;	6) $y=2x-3$ ja $y=x^2-2x-3$.

91. Leia joonte lõikepunktid, kui joonte võrrandid on

1) $x^2+y^2=25$ ja $y=x^2-5$;	2) $y=x^2$ ja $xy=8$;	3) $y=x^2-4$ ja $y=-x^2+5$;
4) $x^2+y^2=36$ ja $y^2=8x+3$;	5) $x^2+y^2=9$ ja $y^2+7x=21$;	6) $y=3x^2+5$ ja $y=-x^2-x+8$;
7) $x^2+y^2=10$ ja $xy=3$;	8) $x^2+y^2=10$ ja $xy=-3$;	9) $x^2+y^2=25$ ja $xy=12$.

B.

92. Lahenda võrrandisüsteem

1) $\begin{cases} y-x^2=0 \\ x+y=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy \\ xy=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy=12 \\ x+2x=10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-y^2+19=xy \\ xy=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-30; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y)=27 \\ x^2+y^2=45. \end{cases}$

2.5. KUJUNDI LÜKE

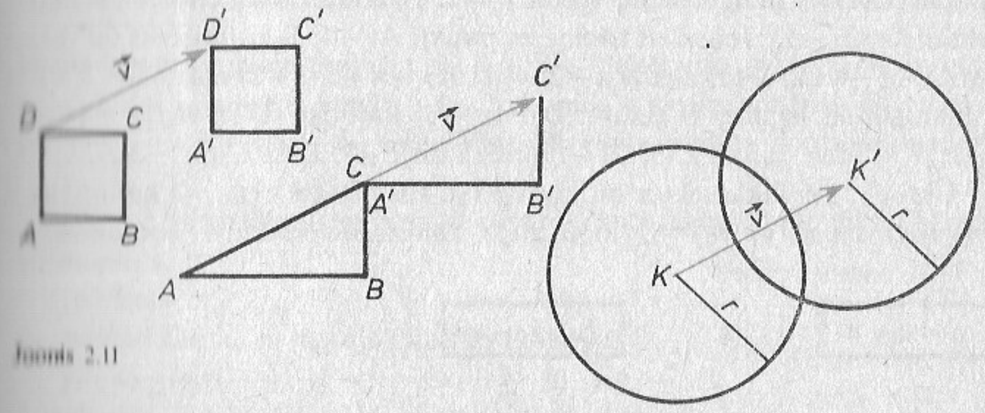
2 m

Kui kujundi kõik punktid liiguvad ühes ja samas suunas edasi võrdse pikkusega lõigu võrra, siis kujundi sellist ümberpaigutust nimetatakse kujundi lükkeks (joon. 2.11).

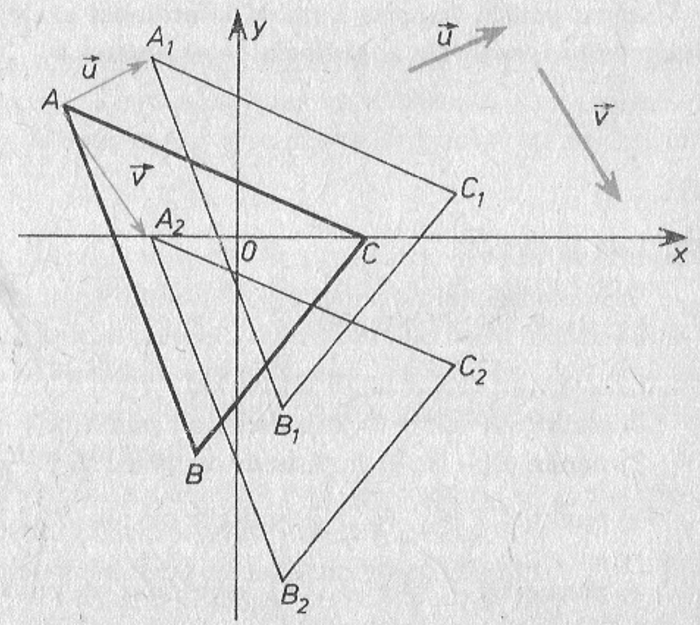
Kujundi lüke on seega määratud ühe vektoriga (joonisel $\vec{v}$). Seda vektorit nimetatakse **lükkevektoriks.**

* Vaatleme kujundi lüket koordinaatteljestikus. Joonisel 2.12 on kujutatud kaht niisugust lüket.

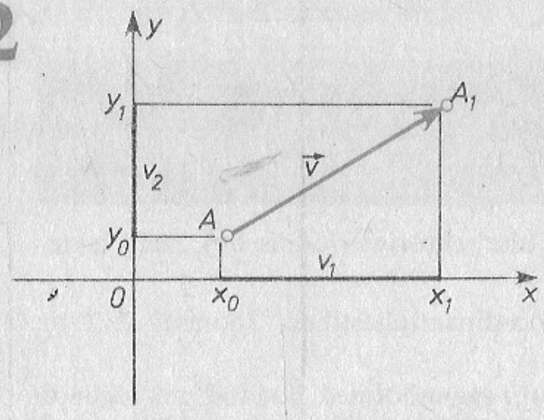
Kujundi lükkel ei muutu tema kuju ega mõõtmed. Saadud uut kujundit nimetatakse esialgse kujundi **kujutiseks.** Nii on joonisel 2.12 esitatud kolmnurga ABC kujutiseks kolmnurgad $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$. Esimene neist on



Joonis 2.11



Joonis 2.12



Joonis 2.13

saadud lükkega, mille määrab vektor $\vec{u}=(2;\ 1)$, teine lükkega, mille määrab vektor $\vec{v}=(2;\ -3)$. Jooniselt näeme, et punkti $A(-4;\ 3)$ kujutisteks on vastavalt $A_1(-4+2;\ 3+1)$ ehk $A_1(-2;\ 4)$ ja $A_2(-4+2;\ 3-3)$ ehk $A_2(-2;\ 0)$. Analoogiliselt leiame, et punkti $B(-1;\ -5)$ kujutisteks on $B_1(1;\ -4)$ ja $B_2(1;\ -8)$ ning punkti $C(3;\ 0)$ kujutiseks on $C_1(5;\ 1)$ ja $C_2(5;\ -3)$.

Üldiselt, kui lükkevektor on $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$, siis punkti $A(x_0;\ y_0)$ kujutiseks on punkt $A_1(x_0+v_1;\ y_0+v_2)$ (joon. 2.13). Tähistades punkti A_1 koordinaate x_1 ja y_1 saame seosed

$$\boxed{x_1=x_0+v_1} \quad \text{ja} \quad \boxed{y_1=y_0+v_2}\ .$$

Seega: **punkti kujutise kumbki koordinaat avaldub esialgse punkti ja lükkevektori vastavate koordinaatide summana.** *

A.

93. Leia punktide
$A(3;\ 5)$, $B(-2;\ 7)$, $C(3;\ -4)$, $D(-5;\ -9)$
kujutised lükkel vektoriga $\vec{v}=(-3;\ 2)$.

94. Leia vektor, mis määrab lükke, kui
1) punkti $A(-3;\ -2)$ kujutiseks on punkt $A_1(-7;\ -1)$;
2) punkti $B(-13;\ 8)$ kujutiseks on punkt $B_1(-9;\ -1)$;
3) punkti $C\left(\frac{13}{6};\ \frac{15}{7}\right)$ kujutiseks on punkt $C_1\left(\frac{4}{3};\ -\frac{17}{4}\right)$;
4) punkti $D\left(-\frac{25}{8};\ -\frac{3}{11}\right)$ kujutiseks on punkt $D_1\left(-\frac{17}{16};\ \frac{9}{22}\right)$.

B.

98. Leia punktid, mille kujutisteks lükkel vektoriga $\vec{v}=\left(5;\ -\frac{3}{2}\right)$ on punktid

$A_1\left(-\frac{3}{2};\ 5\right)$, $B_1(1{,}5;\ 2{,}5)$, $C_1(\sqrt[3]{8};\ 5)$ ja $D_1\left(4^{-\frac{1}{2}};\ 8^{-\frac{2}{3}}\right)$.

2.6. SIRGE JA PARABOOLI LÜKE

*1. Olgu sirge antud võrrandiga

$y=kx+b$

ja sirgel valitud mingi punkt $A(x_0;\ y_0)$. Siis lükkel vektoriga $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$ on selle punkti kujutiseks punkt $A_1(x_1;\ y_1)$, mille koordinaadid avalduvad kujul $x_1=x_0+v_1$, $y_1=y_0+v_2$. Siit võime avaldada punkti A koordinaadid:

$x_0=x_1-v_1$; $y_0=y_1-v_2$.

Et A on vaadeldava sirge punkt, siis tema koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit, s. t.

$y_0=kx_0+b$.

Asendame siin x_0 ja y_0 äsjaleitud avaldistega:

$y_1-v_2=k(x_1-v_1)+b \Rightarrow y_1=kx_1+b-kv_1+v_2$.

Tähistades $b'=b-kv_1+kv_2$, saame sellele võrdusele kuju

$y_1=kx_1+b'$.

Et A on vaadeldava sirge mis tahes punkt, siis osutub ka A_1 selle sirge kujutise mis tahes punktiks. Kirjutades viimases võrduses x_1 ja y_1 asemele tavalised tähised x ja y näeme, et kujutise mis tahes punkti koordinaadid rahuldavad seost

$y=kx+b'$,

mis on järelikult sirge kujutise võrrand. Et sirge ja tema kujutise tõusud osutuvad võrdseteks, siis **sirge kujutiseks on temaga paralleelne sirge.**

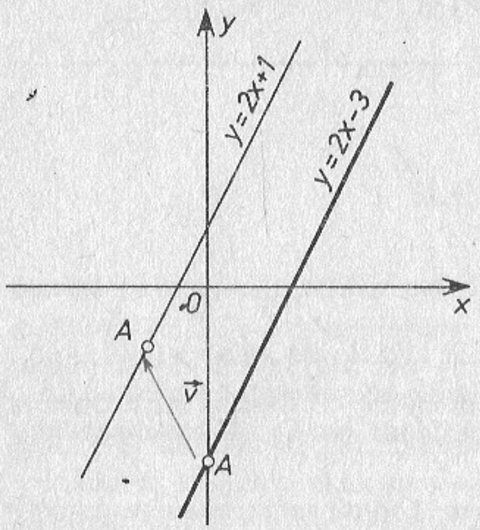
Pane tähele, et sirge kujutise võrrandi saamiseks tuleb meil lihtsalt lähtevõrrandis x ja y asemele kirjutada vastavalt $x-v_1$ ja $y-v_2$.

Näide 1. On antud sirge $y=2x-3$ (joon. 2.14) ja lükkevektor $\vec{v}=(-1;\ 2)$. Leiame selle sirge kujutise võrrandi.

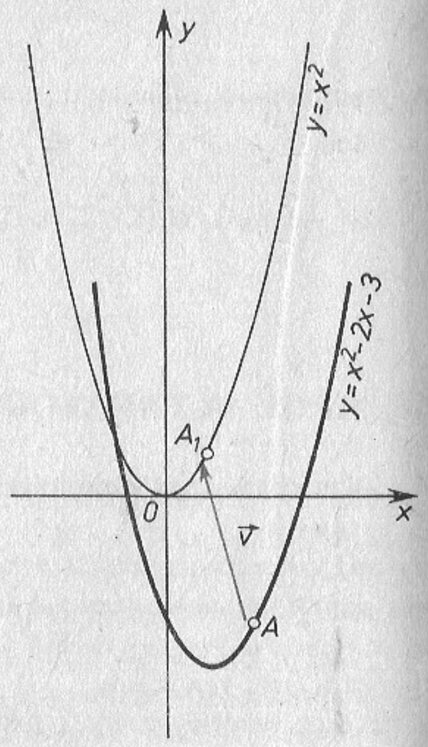
Kui kirjutame sirge võrrandis x asemele $x+1$ ja y asemele $y-2$, siis näeme, et vaadeldava sirge kujutiseks osutub sirge $y=2x+1$.

2. Vaatleme nüüd parabooli, mis on antud oma võrrandiga

$y=ax^2+bx+c$.



Joonis 2.14



Joonis 2.15

Selle parabooli kujutise võrrandi leidmiseks lükkel vektoriga $\vec{v}=(v_1; v_2)$ kirjutame antud võrrandis x asemele $x-v_1$ ja y asemele $y-v_2$:

$y-v_2=a(x-v_1)^2+b(x-v_1)+c \Rightarrow y=$

$=ax^2+(b-2av_1)x+av_1^2-bv_1+c+v_2.$

Tähistades $b'=b-2av_1$ ja $c'=av_1^2-bv_1+c+v_2$ võime saadud võrrandi esitada kujul

$y=ax^2+b'x+c'.$

Võrreldes kujutise võrrandit antud parabooli võrrandiga näeme, et **parabooli lükkel ei muutu tema võrrandi ruutliikme kordaja.**

Näide 2. On antud parabool $y=x^2-2x-3$ (joon. 2.15) ja lükkevektor $\vec{v}=(-1; 4)$. Leiame selle parabooli kujutise võrrandi.

Et antud juhul $b'=b-2av_1=-2-2\cdot 1\cdot(-1)=0$ ja $c'=av_1^2-bv_1+$ $+c+v_2=1-(-2)\cdot(-1)-3+4=0$, siis saame kujutise võrrandiks $y=x^2$. *

A.

96. Leia sirge kujutise võrrand vektoriga $\vec{v}=(2; -5)$ määratud lükke korral, kui sirge võrrand on

1) $y=-3x+1$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-3}$;

3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $y=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{2}$;

5) $\frac{2x}{3}=\frac{3y}{4}$; 6) $\frac{6x}{7}+\frac{12x}{13}=1$.

97. Leia parabooli kujutise võrrand vektoriga $\vec{u}=(-3; 4)$ määratud lükke korral, kui parabooli võrrand on

1) $y=2x^2$; 2) $y=-x^2+3$; 3) $y=x^2-2x+5$;
4) $y=-3x^2$; 5) $y=x^2-2$; 6) $y=-3x^2+2x+1$;
7) $y=x^2+2x$; 8) $y=x^2-3x-4$; 9) $y=2x^2+x-5$.

98. Leia ringjoone kujutise võrrand vektoriga $\vec{v}=(-2; -3)$ määratud lükke korral, kui ringjoone võrrand on

1) $x^2+y^2=16$; 2) $2x^2+2y^2=50$; 3) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=32$.

B

99. Leia lükkevektor, kui on antud joone ja tema kujutise võrrandid

1) $y=2x-1$ ja $y=2x+5$;
2) $y=-3x+4$ ja $y=-3x$;
3) $y-2=5(x+4)$ ja $y=5x-1$;
4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ ja $y=-\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}$;
5) $y=x^2+3x$ ja $y=x^2-3x$;
6) $y=x^2-4x+5$ ja $y=x^2+5$;
7) $y=2x^2-3x+4$ ja $y=2x^2+x-1$;
8) $y=-3x^2+x+5$ ja $y=-3x^2+3x-3$.

100. Leia ringjoone kujutise võrrand, kui ringjoone võrrand ja lükkevektor on

1) $x^2+y^2=16$ ja $\vec{v}=(-2; 1)$;
2) $(x-2)^2+y^2=49$ ja $\vec{v}=(2; -3)$;

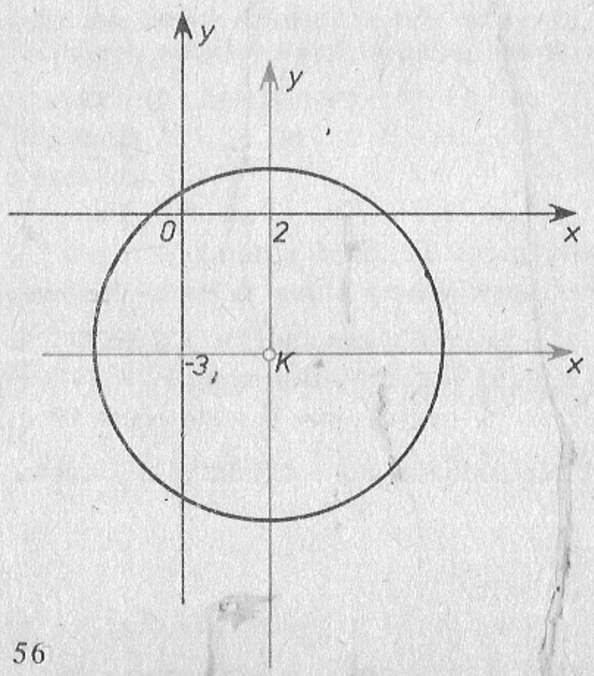
2 3) $x^2+(y+3)^2=100$ ja $\vec{v}=(3;\ -3)$;
4) $(x-1)^2+(y+2)^2=81$ ja $\vec{v}=(1;\ -2)$;
5) $(x+3)^2+(y+4)^2=121$ ja $\vec{v}=(-2;\ 1)$;
6) $(x-7)^2+(y-8)^2=1{,}69$ ja $\vec{v}=(10;\ -3)$.

2.7. KOORDINAATTELJESTIKU LÜKE

Joone analüütiline käsitlemine on seda hõlpsam, mida lihtsam on tema võrrand. Viimase kuju sõltub aga sellest, kuidas on tasandil valitud koordinaatteljestik. Joonisel 2.16 on antud kaks sellist teljestikku, et ühe saab teisest lükke teel. Neist esimese suhtes on ringjoone võrrandiks $(x-2)^2+(y+3)^2=16$, teise suhtes aga $x^2+y^2=16$. Analoogiliselt võib pärast teljestiku sobivat lüket saada sirge võrrandile kuju $y=kx$ ja parabooli võrrandile kuju $y=ax^2$.

Järgnevalt selgitamegi, kuidas leida niisugust lükkevektorit, mille abil saab olemasolevat teljestikku viia sellisesse asendisse, kus joone võrrand omandab võimalikult lihtsa kuju.

Olgu koordinaattasandil antud punkt $P(x;\ y)$. Rakendame koordinaatteljestikule lüket, mis on määratud vektoriga $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$. Teljestiku uues asendis on punktil P uued koordinaadid: $P(x';\ y')$ (joon. 2.17). Jooniselt näeme, et kehtivad võrdused:



Joonis 2.16

$\boxed{x=x'+v_1}$ ja $\boxed{y=y'+v_2}$ (1)

1. Olgu antud sirge võrrand $y=kx+b$. Teeme teljestiku lükke vektoriga $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$. Vastavalt valemitele (1) saame uues teljestikus selle sirge võrrandiks

$$y'+v_2=k(x'+v_1)+b \Rightarrow y'=kx'+kv_1+b-v_2.$$

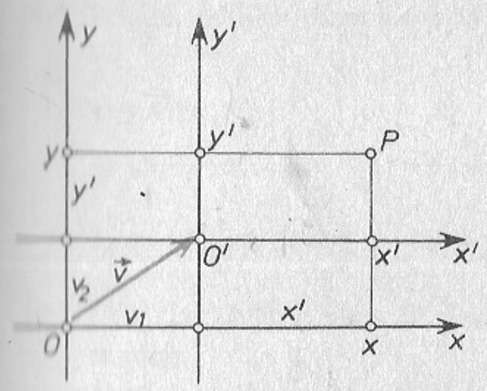
Eesmärgiks on valida lükkevektor $\vec{v}$ nii, et oleks

$$kv_1+b-v_2=0 \Rightarrow v_2=kv_1+b. \qquad (2)$$

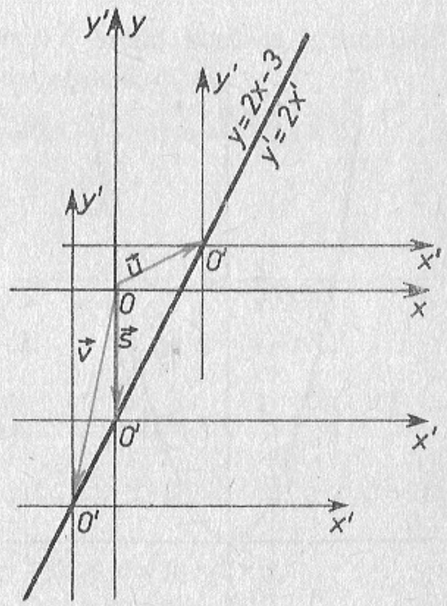
Sel juhul saamegi sirge uueks võrrandiks $y'=kx'$.

Et võrrandit (2) rahuldavaid arvupaare $(v_1;\ v_2)$ on lõpmata palju, siis leidub ka lõpmata palju lükkevektoreid, millede rakendamisel koordinaatteljestikule sirge võrrand lihtsustub kujule $y'=kx'$. Näiteks on sellisteks vektoriteks $\vec{v}_1=(0;\ b)$, $\vec{v}_2=(1;\ k+b)$ jne.

Näide 1. Leiame koordinaatteljestiku lükkevektori nii, et sirge võrrand $y=2x-3$ lihtsustuks. Otsitava sihivektori koordinaatide vahel peab kehtima seos (2), s. t. $v_2=2v_1-3$. Seda võrdust rahuldavaid arvupaare ehk vektoreid $(v_1;\ v_2)$ on lõpmata palju. Näiteks sobivad $\vec{v}=(-1;\ -5)$, $\vec{u}=(2;\ 1)$, $\vec{s}=(0;\ -3)$ jne. Joonisel 2.18 on kujutatud koordinaatteljestiku lükked nimetatud vektoritega $\vec{v}$, $\vec{u}$, ja $\vec{s}$. Kõigil juhtudel sirge läbib uue koordinaatteljestiku alguspunkti.



Joonis 2.17



Joonis 2.18

2. Olgu antud parabooli võrrand $y=ax^2+bx+c$. Teeme teljestiku lükke vektoriga $\vec{v}=(v_1; v_2)$. Vastavalt valemitele (1) saame sama parabooli võrrandiks uues teljestikus

$$y'+v_2=a(x'+v_1)^2+b(x'+v_1)+c \Rightarrow y'+v_2=$$
$$=ax'^2+(2av_1+b)x'+av_1^2+bv_1+c.$$

Et võrrand lihtsustuks kujult $y=ax^2+bx+c$ kujule $y'=ax'^2$, peavad lükkevektori koordinaadid olema valitud nii, et kehtiksid järgmised võrdused:

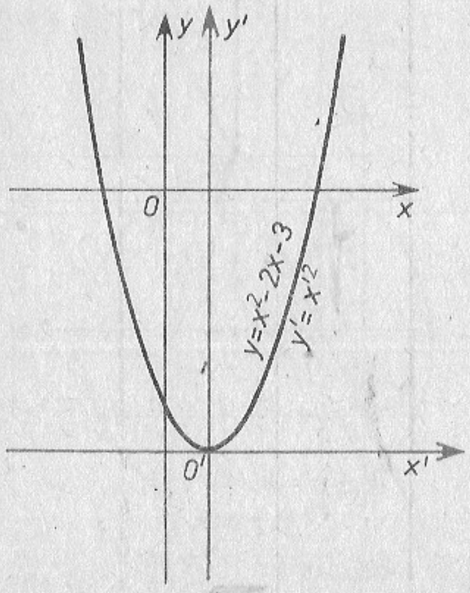
$$\begin{cases} 2av_1+b=0 \Rightarrow v_1=\dfrac{-b}{2a} \\ v_2=av_1^2+bv_1+c \Rightarrow v_2=a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{2a}+c \Rightarrow v_2=-\dfrac{b^2}{4a}+c \end{cases} \quad (3)$$

Nagu näha, leidub ainult üks lükkevektor, mis lihtsustab parabooli võrrandi kujule $y'=ax'^2$.

Näide 2. Leiame koordinaatteljestiku lükkevektori, mis lihtsustaks võrrandi $y=x^2-2x-3$ kujule $y'=x'^2$. Vastavalt valemitele (3) tuleb valida

$$v_1=-\frac{b}{2a}=1 \text{ ja } v_2=-\frac{b^2}{4a}+c=-4.$$

Seega lihtsustub antud võrrand nõutud kujule siis, kui rakendada koordinaatteljestikule lüket vektoriga $\vec{v}=(1; -4)$. Jooniselt 2.19 näeme, et uues koordinaatteljestikus on parabool sümmeetriline y'-telje suhtes ja läbib koordinaatide alguspunkti $0'$.



Joonis 2.19

3. Olgu antud ringjoone võrrand $(x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2$. See võrrand lihtsustub, kui sooritada teljestiku lüke nii, et koordinaatide alguspunkt läheb ringjoone keskpunkti, s. t. kui lükkevektoriks valida vektor $\vec{v}=(k_1; k_2)$. Tõepoolest, sel juhul on valemite (1) põhjal

$$x=x'+k_1 \text{ ja } y=y'+k_2$$

ning ringjoone võrrand teiseneb kujule

$$(x'+k_1-k_1)^2+(y'+k_2-k_2)^2=r^2 \Rightarrow x'^2+y'^2=r^2.$$

A.

101. Leia koordinaatteljestiku lükkevektor nii, et antud joone võrrand lihtsustuks:

ü

1) $y=3x+5$;
2) $y=-4x+1$;
3) $2x+3y-5=0$;
4) $3x-2y+7=0$;
5) $y=x^2+4x-5$;
6) $y=x^2-3x+4$;
7) $y=2x^2-x+3$;
8) $y=-3x^2+x-5$;
9) $(x+3)^2+(y-)^2=16$;
10) $(x-5)^2+(y+2)^2=144$;
11) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$;
12) $x^2+y^2-3x-5y-7=0$.

KORDAMINE

102. Esita võrrand, mis määrab

k

1) ringjoone; 2) parabooli; 3) hüperbooli.

103. Kuidas sõltub parabooli $y=ax^2+bx+c$ asend kordaja a märgist? Kirjelda parabooli asendit koordinaatteljestikus, kui

1) $b=0$ ja $c\neq 0$; 2) $b\neq 0$ ja $c=0$; 3) $b=0$ ja $c=0$.

104. Selgita, millise joone võrrand on

1) $y=3x^2$;
2) $y=3x$;
3) $y=\frac{3}{x}$;
4) $y=3x^2+2$;
5) $y=3x-2$;
6) $y^2=4-x^2$;
7) $y=-3x^2+2x+1$;
8) $y=3$;
9) $y=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$.

105. Leia ringjoone pikkus ja ringi pindala, kui ringjoon on antud võrrandiga

1) $x^2+y^2=16$;
2) $(x-3)^2+y^2=144$;
3) $x^2+(y+3)^2=9$;
4) $(x-5)^2+(y+2)^2=36$;
5) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$;
6) $x^2+y^2-3x+5y-0{,}5=0$.

106. Leia joonte lõikepunktid, kui joonte võrrandid on

1) $x-y=7$ ja $x^2+y^2=169$;
2) $y=x^2$ ja $x^2+y^2=2$;
3) $x^2+y^2=20$ ja $xy=8$;
4) $x^2+y^2=10$ ja $xy=3$.

107. Leia joone kujutise võrrand, kui joone võrrand ja lükkevektor $\vec{v}$ on

1) $2x-3y-5=0$ ja $\vec{v}=(1;\ -3)$;
2) $y=x^2-3x+2$ ja $\vec{v}=(-2;\ -3)$;
3) $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ ja $\vec{v}=(2;\ 3)$.

108. Leia niisugused koordinaatteljestiku lükkevektorid, millede rakendamisel eelmises ülesandes antud joonte võrrandid lihtsustuvad.

Järgnevalt tuletame meelde ülesannete lahendamist ruutvõrrandi koostamise abil.

109. Kahe teineteisele järgneva

1) paarisarvu korrutis on 168;
2) täisarvu summa on 145.

Mis arvud need on?

110. Jaga lõik, mille pikkus on 20 cm, kahte ossa nii, et suurema osa jagatis kogu lõiguga on sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

111. Ruudutaolise plekitüki nurkadest on välja lõigatud 4 ruutu, küljega 4 cm. Ülejäänud osa murtakse kokku lahtiseks karbiks. Kui suur peab plekitükk olema, et karbi ruumala oleks 100 cm³? Mitu protsenti plekist läheb karbi valmistamisel kaduma?

112. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 2 korda suurem tema laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud külgedega 5 cm. Ülejäänud osa murtakse kokku karbiks, mille ruumala on 840 cm³. Leia papitüki mõõtmed.

113. Veetorni paak täitub peapumba kaudu 3,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 6 tunni jooksul. Leia aeg, mis kulub paagi täitmiseks ainult peapumba kaudu.

3. FUNKTSIOONI UURIMINE

Meie järgmiseks ülesandeks on lähemalt tundma õppida lineaarfunktsiooni ja ruutfunktsiooni ning ennast ette valmistada funktsiooni üldiseks uurimiseks, mille juurde jõuame X klassis. Funktsiooni uurimine, s. t. tema omaduste selgitamine nõuab meilt muuhulgas, et tunneksime nii palju arve, et arvtelje igale punktile vastaks üks arv. Osutub nimelt, et arvteljel on punkte rohkem, kui leidub ratsionaalarve. Ainult ratsionaalarve tundes võib näiteks mõne funktsiooni graafik lõigata x-telge punktis, millele vastavat arvu pole meie jaoks üldse olemas. Seepärast peamegi kõigepealt täiendama oma teadmisi arvuhulkadest.

3.1. REAALARVUDE HULK

1. RATSIONAALARVUDE HULK

Kaheksa õppeaasta vältel oleme õppinud arvutama naturaalarvude, täisarvude ja murdudega. Juurte käsitlemisel puutusime aga kokku veel arvudega, nagu $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{10}$ jne., mis ei ole ratsionaalarvud.

Naturaalarvude hulga

$\mathbf{N}=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$

laiendamisel negatiivsete täisarvudega

$\mathbf{Z}^-=\{-1;\ -2;\ -3;\ \ldots\}$

jõudsime **täisarvude hulgani**

$\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}^-$.

Kasutades veel **positiivsete täisarvude** hulka

$\mathbf{Z}^+=\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$

võime üles kirjutada järgmised seosed:

$\mathbf{Z}^+\cup\{0\}=\mathbf{N}$; $\quad\mathbf{Z}^+\cup\{0\}\cup\mathbf{Z}^-=\mathbf{Z}$.

Täisarvude hulga laiendamisel **murdarvude hulgaga**

$$\mathbf{M}=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in\mathbf{Z};\ n\in\mathbf{Z}^{+};\ n\neq 0;\ n\neq 1\right\}$$

jõudsime **ratsionaalarvude hulgani**

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in\mathbf{Z};\ n\in\mathbf{Z}^{+};\ n\neq 0\right\}.$$

Seega

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\cup\mathbf{M}.$$

Iga ratsionaalarv on kas täisarv, lõplik kümnendmurd või lõpmatu perioodiline kümnendmurd.

Näiteks:

$\frac{12}{6}=2$; $-\frac{3}{12}=-0{,}25$; $\frac{7}{3}=2{,}333\ldots=2{,}(3)$;

$\frac{1231}{990}=1{,}2(43)$; $\frac{16}{7}=2{,}(285714)$.

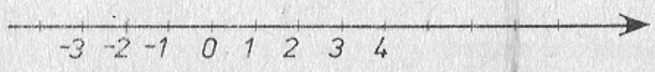
Täisarvude hulka nimetatakse **diskreetseks** selles mõttes, et arvteljel vastavad üksteisele järgnevatele täisarvudele üksikud punktid, millede vaheline kaugus on võrdne ühikuga (joon. 3.1). Ka naturaalarvude hulk on samas mõttes diskreetne. Ratsionaalarvude hulka ei saa aga enam diskreetseks nimetada, sest me ei oska öelda, missugune ratsionaalarv on antud ratsionaalarvule vahetult järgnev.

Teoreem. **Iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarv.**

*Tõestus. Olgu $\frac{m}{n}$ ja $\frac{p}{q}$ kaks ratsionaalarvu. Nende arvude aritmeetiline keskmine

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}{2}=\frac{mq+np}{2nq}$$

on jälle ratsionaalarv ning paikneb $\frac{m}{n}$ ja $\frac{p}{q}$ vahel. Tõepoolest, näiteks juhul $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$ saame



Joonis 3.1

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}{2}<\frac{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}}{2}=\frac{p}{q}$$

ja

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}{2}>\frac{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}}{2}=\frac{m}{n}.$$ ∎ *

Seda teoreemi korduvalt kasutades võib veenduda, et $\frac{m}{n}$ ja $\frac{p}{q}$ vahel leidub koguni kuitahes palju ratsionaalarve. Näiteks arvude

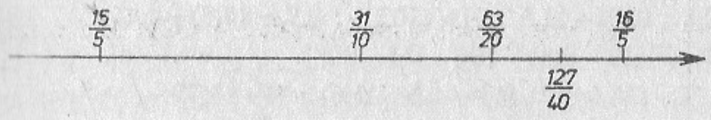
$$\frac{m}{n} \text{ ja } \frac{mq+np}{2nq}$$

vahel on nende aritmeetiline keskmine

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{mq+np}{2nq}}{2}=\frac{2mq+mq+np}{4nq}=\frac{3mq+np}{4nq},$$

mis on jällegi ratsionaalarv. Niimoodi võib aritmeetiliste keskmiste leidmist jätkata lõpmatult. Seega: **iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel leidub lõpmata palju ratsionaalarve.** Selles mõttes nimetataksegi ratsionaalarvude hulka **tihedaks.**

Joonis 3.2



Näiteks arvude $\frac{15}{5}$ ja $\frac{16}{5}$ vahel on arv $\frac{31}{10}$ (joon. 3.2). Arvude $\frac{31}{10}$ ja $\frac{16}{5}$ vahel on arv $\frac{63}{20}$ jne. Nii saamegi lõigu korduva poolitamise teel arvude $\frac{15}{5}$ ja $\frac{16}{5}$ vahele lõpmata palju järjestikustele jaotuspunktidele vastavaid arve.

Järgnevate ülesannetega meenutame tehteid ratsionaalarvudega.

3 A.

114. Arvuta (kui võimalik, peast):

1) $3{,}2+1{,}5$; 2) $3{,}2-1{,}5$; 3) $3{,}2\cdot(-1{,}5)$;
4) $0{,}12+0{,}2$; 5) $0{,}12-0{,}2$; 6) $0{,}12:0{,}2$;
7) $(-2{,}6)+(-4{,}7$; 8) $(-2{,}6)-(-4{,}7)$; 9) $(-2{,}6)\cdot(-4{,}7)$.

115. Arvuta (kui võimalik, peast):

1) $3\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}$; 2) $3\frac{1}{2}+5\frac{5}{4}$; 3) $3\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}$;
4) $2\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}$; 5) $2\frac{1}{3}-3\frac{5}{6}$; 6) $2\frac{1}{3}\cdot5\frac{5}{6}$;
7) $2\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{2}$; 8) $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$; 9) $\left(-1\frac{1}{2}\right):\left(-2\frac{1}{4}\right)$.

116. Arvuta

1) $8\frac{19}{20}+5{,}875+20\frac{35}{40}$; 2) $76-4\frac{7}{25}+8{,}28$;
3) $6{,}75+3\frac{1}{4}-7\frac{5}{28}$; 4) $2\frac{5}{6}-1{,}6-\frac{2}{3}$;
5) $19{,}6\cdot2\frac{1}{2}-\left(2{,}0625-1\frac{5}{12}\right):\frac{1}{8}$;
6) $\frac{5}{16}:0{,}125+1{,}456:\frac{7}{25}+4{,}5\cdot\frac{4}{5}$.

117. Arvuta

1) $(2{,}727:(-0{,}9)+1{,}9\cdot(-5{,}3)+1{,}58):4{,}8$;
2) $(12{,}8:0{,}64+12{,}6:9)\cdot(302{,}4:0{,}9-84{,}5)+4{,}45$;
3) $(156{,}6:18-8{,}6)\cdot100:0{,}1-99$;
4) $11{,}21-(38{,}148):0{,}3-4{,}8\cdot11{,}6):11+13{,}79$.

B.

118. Lahenda võrrand.

1) $\left(\frac{25}{72}x-\frac{9}{11}\right)-\left(\frac{3}{8}x+\frac{5}{9}\right)=\frac{7}{99}$;
2) $\left(1{,}46-\frac{1}{5}x\right)-\left(0{,}86-\frac{2}{9}x\right)=1$;
3) $\frac{x-0{,}8}{x+0{,}2}=\frac{6{,}3}{7{,}3}$; 4) $\frac{10{,}5}{y-3{,}6}=\frac{51}{y+1{,}8}$; 5) $\frac{2x-3{,}2}{1{,}2}=\frac{5x-6}{0{,}5}$.

Veendume nüüd, et ratsionaalarvudest ei piisa kõigi lõikude täpse pikkuse väljendamiseks.

Teoreem. **Ühikruudu diagonaali pikkust ei saa avaldada ratsionaalarvuga** (joon. 3.3).

∗Tõestus. Pythagorase teoreemi kasutades saab ühikruudu diagonaali d avaldada kujul

$d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Teoreemis seega väidetakse, et **arv $\sqrt{2}$ ei ole ratsionaalarv.** Tõestame selle väite vastuväiteliselt.

Oletame, et leidub niisugune taandatud murd $\frac{m}{n}$ (s. t. $m\neq kn$), mis võrdub $\sqrt{2}$-ga. Kui $\frac{m}{n}=\sqrt{2}$, siis $\frac{m^2}{n^2}=2$, ehk $m^2=2n^2$.

Et paarisarvu ruut on paarisarv, näiteks

$2^2=4$, $4^2=16$, $6^2=36$, $8^2=64$ jne.

ning paaritu arvu ruut on paaritu arv, näiteks

$3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$ jne.,

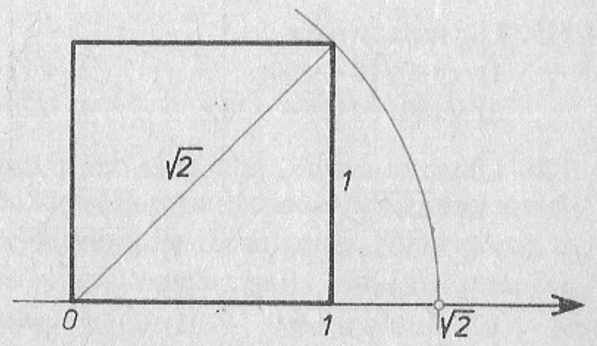
siis võrdusest $m^2=2n^2$ järeldub, et m on paarisarv, s. t. $m=2k$ ja peab kehtima võrdus

$(2k)^2=2n^2 \Rightarrow 4k^2=2n^2 \Rightarrow 2k^2=n^2$.

Nüüd järeldub viimasest võrdusest, et ka n peab olema paarisarv: $n=2l$. Seega

$$\frac{m}{n}=\frac{2k}{2l},$$

millest aga selgub, et murd $\frac{m}{n}$ on taandatav 2-ga. See on vastuolus tehtud oletusega, mille kohaselt $\frac{m}{n}$ peab olema taandatud murd. Niisiis, arv $\sqrt{2}$ ei ole esitatav ratsionaalarvuna. ∎ ∗



Joonis 3.3

Saab tõestada, et näiteks $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, ja veel paljud teised arvud ei ole ratsionaalarvud, s. t. nad on nn. **irrratsionaalarvud**. Kuigi need arvud pole ratsionaalarvud, saab neile siiski leida ratsionaalarvulisi lähendeid puuduga ja liiaga.

Leiame näiteks arvule $\sqrt{2}$ proovimise teel ligikaudseid väärtusi nii puuduga kui liiaga:

$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, sest $1{,}96<2<2{,}25$,
$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, sest $1{,}9881<2<2{,}0164$,
$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, sest $1{,}999396<2<2{,}002225$ jne.

Siit ilmneb, et irratsionaalarv $\sqrt{2}$ on esitatav kümnendmurruna kuitahes suure täpsusega. Näiteks on tema lähisväärtusteks puuduga

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; . . .

Niiviisi saadav kümnendmurd ei tohi olla ratsionaalarv, s. t. ei tohi olla ei lõplik kümnendmurd ega ka lõpmatu perioodiline kümnendmurd. Jääb ainus võimalus, et $\sqrt{2}$ avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna

$\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots$

Lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna avalduvad ka arvud nagu $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$; sin 16° jne. Näiteks

$\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots$

m **Arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.**

Irratsionaalarve on lõpmata palju. Ka irratsionaalarvude hulk on **tihe** samas mõttes nagu ratsionaalarvude hulk.

Järgnevate ülesannetega tuletame meelde tehteid astmete ja juurtega. *Kas tunned seal esitatavate arvude hulgast ära irratsionaalarvud?*

A.

ü **119.** Lihtsusta avaldis

1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$;
2) $\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{180}-\sqrt{125}+\sqrt{20}$;
4) $\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{175}+\sqrt{63}$.

120. Lihtsusta avaldis, milles iga täht tähistab positiivset arvu:

1) $\sqrt{25m^3}$;
2) $\sqrt{50a^2}$;
3) $\sqrt[3]{27v^4}$;
4) $\sqrt[3]{125a^2b^3}$;
5) $\sqrt{1000ab^4}$;
6) $\sqrt{0{,}01a^2}$;
7) $\sqrt[3]{24a^3b^5}$;
8) $\sqrt[4]{a^5b^7c}$;
9) $\sqrt[3]{0{,}001a^3b^7}$;
10) $\sqrt{a^2b^2+a^4b^2}$;
11) $\sqrt{25a^4+a^2}$;
12) $\sqrt{a^2+2a+1}$.

121. Lahenda võrrand

1) $x\sqrt{3}=5\sqrt{27}$;
2) $x\sqrt{12}-x\sqrt{3}=\sqrt{27}$;
3) $x\sqrt{12}=x\sqrt{3}+3$;
4) $x\sqrt{2}+x\sqrt{18}=8$;
5) $x^2-2x\sqrt{2}+1=0$;
6) $x^2-2x\sqrt{5}-4=0$.

122. Arvuta

1) $4^{\frac{1}{2}}$;
2) $9^{\frac{1}{3}}$;
3) $8^{\frac{2}{3}}$;
4) $64^{\frac{2}{3}}+8^{\frac{1}{3}}$;
5) $4^{\frac{3}{2}}-16^{\frac{3}{4}}$;
6) $32^{\frac{3}{5}}+81^{\frac{1}{4}}$.

123. Lihtsusta avaldis

1) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$;
2) $m^{\frac{5}{6}}:m^{\frac{1}{2}}$;
3) $ab^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{a^2b}^{-\frac{2}{3}}$
4) $\left(a^2b^{\frac{5}{6}}\right)^6$;
5) $\left(8ab^2\cdot a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$;
6) $\left(27m^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{2}{3}}\cdot n^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

B.

124. Põhjenda väide: kui võrdkülgse kolmnurga külje pikkus a on ratsionaalarv, siis selle kolmnurga ümbermõõt on ratsionaalarv, kuid kõrgus ja pindala on irratsionaalarvud.

125. Leia juur

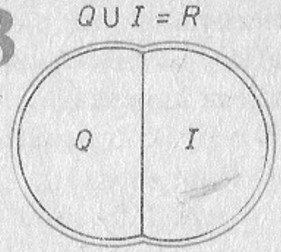
1) $\sqrt{(x-1)^2}$, kui $x\geqslant 1$;
2) $\sqrt{(x-1)^2}$, kui $x<1$;
3) $\sqrt{(a-b)^2}$, kui $a\geqslant b$;
4) $\sqrt{(a-b)^2}$, kui $a<b$;
5) $\sqrt{a^2+1-2a}$;
6) $\sqrt{4m^2+4m+1}$.

126. Lahenda võrrand

1) $\sqrt{6x-5}+x=10$;
2) $x-\sqrt{x^2-5}=-5$;
3) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$;
4) $\sqrt{2x+2}+\sqrt{2x-5}=7$.

3. REAALARVUDE HULK

Iga kahe ratsionaalarvu vahel on lõpmata palju ratsionaalarve, seega arvteljel lõpmata paljudele punktidele vastavad ratsionaalarvud. Nüüd selgub, et lisaks neile punktidele on arvteljel veel lõpmata palju niisuguseid punkte, milledele vastavad irratsionaalarvud.



Joonis 3.4

Ratsionaalarvude hulk **Q** ja irratsionaalarvude hulk **I** kokku moodustavad nn. **reaalarvude hulga R** (joon. 3.4):

$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}$.

Osutub, et **igale reaalarvule vastab arvtelje üks kindel punkt** ja **arvtelje igale punktile vastab üks kindel reaalarv.**

Need väited võib kokkuvõtlikult esitada kujul: **reaalarvude hulk ja arvtelje punktide hulk on üksüheses vastavuses.** Samas tähenduses öeldakse ka, et **reaalarvude hulk on pidev.**

Reaalarvudega saab sooritada samu tehteid mis ratsionaalarvudegagi. Selgitame selliste tehete tähendust ühe näite abil.

Näide. Leiame summa $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Selleks võtame vaatlusele arvude $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ ratsionaalarvulised lähendid puuduga ja liiaga. Liites puuduga võetud lähendid ja liiaga võetud lähendid saame tõkked, millede vahele peab jääma otsitav summa. Nii võime kirjutada, et

$1{,}4+1{,}7<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1{,}5+1{,}8$

$1{,}41+1{,}73<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1{,}42+1{,}74$

$1{,}414+1{,}732<\sqrt{2}+\sqrt{3}<1{,}415+1{,}733$ jne.

ehk

$3{,}1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}3$

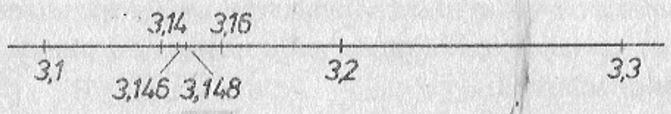
$3{,}14<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}16$

$3{,}146<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}148$ jne.

Jooniselt 3.5 näeme, et nendele tõketele vastavad punktid mõlemalt poolt lähenevad ühele punktile. Sellele punktile vastav arv ongi otsitav summa, mis avaldub nagu liidetavadki lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna ja on seega irratsionaalarv.

Praktikas kasutatakse irratsionaalarvudega arvutamisel ikka nende ratsionaalarvulisi lähendeid. Seega kas

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}1$ või $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}14$ või $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}146$ jne.



Joonis 3.5

Analoogiliselt võib selgitada ka teisi tehteid kahe reaalarvuga.

Tehted reaalarvudega ja tehted ratsionaalarvudega alluvad samadele seadustele. Nende seadustega oleme tutvunud juba nooremates klassides. Nii näiteks saab iga kahe reaalarvuga a ja b sooritada liitmise ja korrutamise tehteid, mis alluvad järgmistele seadustele:

$a+b=b+a$	$ab=ba$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
$0+a=a$	$1\cdot a=a$
$a(b+c)=ab+ac$	

Igal reaalarvul a on olemas **vastandarv** $-a$, mis rahuldab tingimust

$a+(-a)=0$,

ja **pöördarv** $\frac{1}{a}$, mis rahuldab tingimust

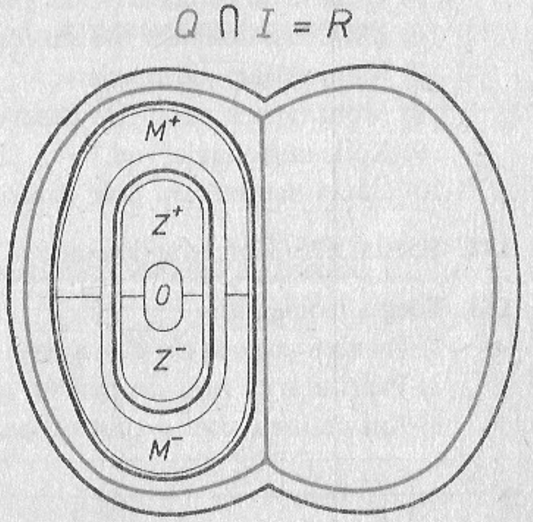
$a\cdot\frac{1}{a}=1$.

Arvu 0 vastandarvuks on ta ise, samuti nagu arvu 1 pöördarvuks on ta ise.

Iga kahe reaalarvuga a ja b on sooritatavad ka liitmise ja korrutamise pöördtehted — lahutamine ja jagamine. Ainult arvuga 0 ei saa jagada.

Arvuhulkade omavahelised seosed on kujutatud joonisel 3.6. *Mida tähendavad seal* $\mathbf{M}^-$ *ja* $\mathbf{M}^+$?

Joonis 3.6



3 A.

127. Selgita, kas lause on tõene või väär:

1) $15 \in \mathbf{N}$; 2) $3\frac{1}{3} \in \mathbf{Z}$; 3) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;

4) $-5 \in \mathbf{N}$; 5) $4\frac{5}{6} \in \mathbf{R}$; 6) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.

128. Selgita, kas lause on tõene või väär:

1) kui $x \in \mathbf{N}$, siis $3x-5 \in \mathbf{N}$;
2) kui $x \in \mathbf{N}$, siis $3x-5 \in \mathbf{Z}$;
3) kui $x \in \mathbf{R}$ ja $x \neq 5$, siis $(x-5)^2 > 0$.

129. Leia proovimise teel arvu $\sqrt{3}$ puuduga ja liiaga lähendid täpsusega 1; 0,1; 0,01.

130. Missugune arvudest

$\sqrt{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt{1000}$, $\sqrt[7]{77}$

on ratsionaalarv, missugune irratsionaalarv?

B.

131. Missugune lause on tõene?

1) Kõik ratsionaalarvud on reaalarvud.
2) Kõik täisarvud on naturaalarvud.
3) Mõni täisarv on naturaalarv.
4) Ükski ratsionaalarv pole täisarv.
5) Ükski irratsionaalarv pole täisarv.
6) Kõik irratsionaalarvud on reaalarvud.
7) Mõni täisarv on reaalarv.
8) Mõni ratsionaalarv on täisarv.
9) Kõik ratsionaalarvud.
10) Ükski naturaalarv pole irratsionaalarv.

132. Tõesta, et $\sqrt{3}$ on irratsionaalarv.

133. Tõesta teoreemid:

1) Paarisarvu ruut on paarisarv.
2) Paaritu arvu ruut on paaritu arv.
3) Kui naturaalarvu n ruut on paarisarv, siis arv n on paarisarv.

4. REAALARVUDE PIIRKONNAD

Märgime arvteljel kaks punkti, mis vastavad reaalarvudele a ja b, kusjuures $a < b$ (joon. 3.7). Nende punktidega on arvtelg jaotatud kolmeks osaks ehk piirkonnaks ja reaalarvude hulk kolmeks osahulgaks. Tutvume järgnevalt niisuguste osahulkade nimetuste ja tähistusviisidega.

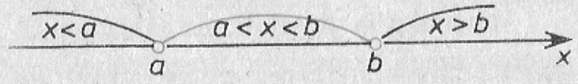
1. **Kinnine vahemik** ehk **lõik:**
$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a;\ b]$ (joon. 3.8).

2. **Lahtine vahemik** ehk **vahemik:**
$\{x \mid a < x < b\} =]a;\ b[$ (joon. 3.9).

3. **Poolkinnine vahemik** ehk **poollõik:**
$\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a;\ b[$ (joon. 3.10*a*)
või
$\{x \mid a < x \leqslant b\} =]a;\ b]$ (joon. 3.10*b*).

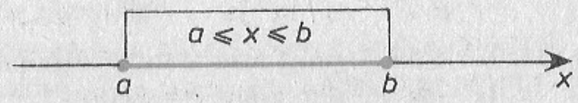
Lahtine vahemik ja poolkinnine vahemik võivad olla nn. **lõpmatud vahemikud.** Näiteks

Joonis 3.7



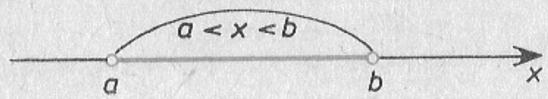
kinnine vahemik e. lõik

Joonis 3.8



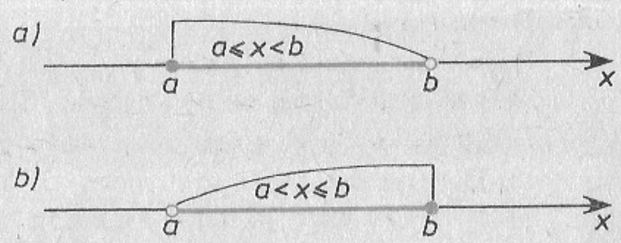
lahtine vahemik e. vahemik

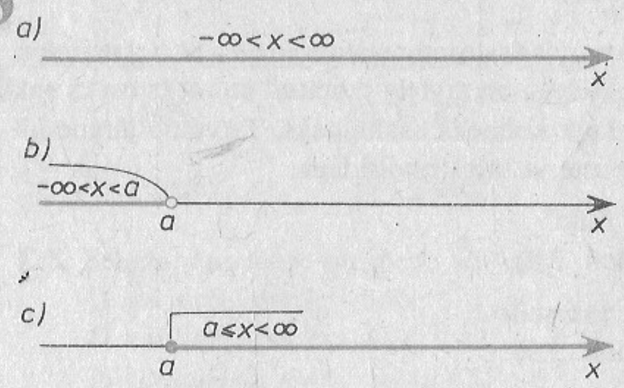
Joonis 3.9



poolkinnine vahemik e. poollõik

Joonis 3.10





Joonis 3.11

$\{x \mid -\infty<x<\infty\}=]-\infty;\ \infty[=\mathbf{R}$ (joon. 3.11*a*);
$\{x \mid -\infty<x<a\}=]-\infty;\ a[$ (joon. 3.11*b*);
$\{x \mid a\leqslant x<\infty\}=[a;\ \infty[$ (joon. 3.11*c*).

Kui lõpmatu vahemiku moodustavad kõik positiivsed reaalarvud või kõik negatiivsed reaalarvud, siis kasutatakse ka lühemat tähistust:

$\mathbf{R}^+=]0;\ \infty[$ ja $\mathbf{R}^-=]-\infty;\ 0[$.

Vahemike ja poollõikude tähistamisel kasutatakse tagurpidi nurksulu asemel sageli ümarsulgu. Seega näiteks $(a;\ b)$ tähendab sama, mis $]a;\ b[$ ja $[a;\ b)$ sama, mis $[a;\ b[$.

A.

ü **134.** Kirjelda järgmist reaalarvude piirkonda ja selgita, kas see on kinnine, lahtine või poolkinnine vahemik:

1) $\{x \mid -5\leqslant x\leqslant 10\}$;
2) $\{x \mid 100<x\leqslant 100{,}1\}$;
3) $\{x \mid -1{,}9<x<0\}$;
4) $\{x \mid -35\leqslant x<-34\}$;
5) $\{x \mid -\infty<x\leqslant -3\}$;
6) $\{x \mid -3<x<\infty\}$;
7) $\{x \mid -\infty<x<\infty\}$;
8) $\{x \mid 5\leqslant x<\infty\}$;
9) $[-2;\ 6]$;
10) $]-2;\ 6]$;
11) $]-2;\ 6[$;
12) $[-2;\ 6[$;
13) $[-3;\ \infty[$;
14) $]-\infty;\ 9[$.

B.

135. Leia piirkondade ühend ning ühisosa, kui piirkonnad on

1) $]-3,\ 6]$ ja $[2,\ 4[$;
2) $[-7,\ -2]$ ja $]-2,\ 2[$;
3) $[3,\ 9[$ ja $[10,\ 13[$;
4) $\{x \mid -5<x<1\}$ ja $\{x \mid -1<x\leqslant 5\}$;

5) $\{x \mid -3\leqslant x<-1\}$ ja $\{x \mid -8<x\leqslant 0\}$;
6) $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$ ja $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant -3\}$;
7) $\{x \mid -\infty<x<-4\}$ ja $\{x \mid -9<x<\infty\}$;
8) $\{x \mid -\infty<x\leqslant 5\}$ ja $\{x \mid -\infty<x\leqslant 9\}$;
9) $\{x \mid 3\leqslant x<\infty\}$ ja $\{x \mid -\infty<x<1\}$;
10) $\{x \mid -7\leqslant x<\infty\}$ ja $\{x \mid -1<x<\infty\}$.

3.2. LINEAARFUNKTSIOONI JA RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE

Kui muutujad x ja y on omavahel seotud võrdusega

$y=ax+b$,

kus a ja b on antud arvud ($a\neq 0$), siis öeldakse, et see võrdus esitab **lineaarfunktsiooni.**

Kui muutujad x ja y on omavahel seotud võrdusega

$y=ax^2+bx+c$,

kus a, b ja c on antud arvud ($a\neq 0$), siis öeldakse, et see võrdus esitab **ruutfunktsiooni.**

m

Muutujat x, mis esineb siin nii lineaar- kui ka ruutfunktsiooni esitavas valemis, nimetatakse sageli vastava funktsiooni **argumendiks.**

Tutvume nende funktsioonide omaduste uurimisega kahe näite abil, milles muutujatel on konkreetne tähendus.

Näide 1. Küünal põleb kiirusega 4 cm tunnis. Seos põleva küünla pikkuse p (sentimeetrites) ja põlemise aja t (tundides) vahel, kui põlemata küünla pikkus on 30 cm, avaldub valemina

$p=30-4t$.

Uurime selle võrdusega esitatud lineaarfunktsiooni, kus argumendiks on aeg t.

1° Kõigepealt huvitume, missuguste argumendi t väärtuste korral saab üldse leida funktsiooni väärtusi.

Et ülesande seade kohaselt peab olema $p\geqslant 0$, siis ka $30-4t\geqslant 0$ ehk $t\leqslant 7{,}5$. Seega vaadeldava funktsiooni väärtusi saab arvutada ainult siis, kui $0\leqslant t\leqslant 7{,}5$.

Seda argumendi väärtuste piirkonda, mille puhul saame leida funktsiooni väärtusi, nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks ja tähistatakse tähega X.

m

Niisiis, antud juhul $X=[0;\ 7{,}5]$.

Selgitame veel, missuguseid väärtusi võib omada funktsioon ehk missugune on **funktsiooni väärtuste piirkond** Y. Kui $t=0$, siis $p=30$ ja $t=7{,}5$, siis $p=0$. Argumendi väärtuste kasvades funktsiooni väärtused kahanevad ja seega

$Y=[30;\ 0]$.

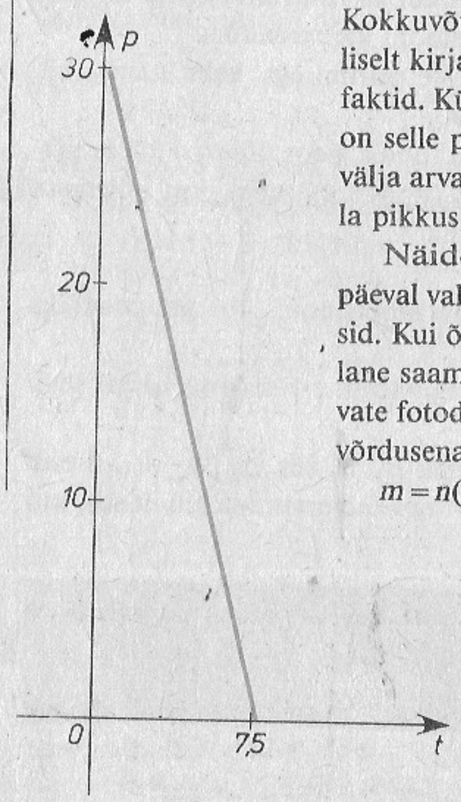
2° Järgnevalt teeme kindlaks, missuguste argumendi väärtuste korral on funktsiooni väärtused negatiivsed, võrdsed nulliga või positiivsed. Neid argumendi väärtuste piirkondi nimetatakse vastavalt funktsiooni **negatiivsuspiirkonnaks, nullkohtade hulgaks** ja **positiivsuspiirkonnaks** ning tähistatakse: X^-, X_0 ja X^+.

Meie näites $X^-=\varnothing$, $X_0=\{7{,}5\}$ ja $X^+=[0;\ 7{,}5[$

3° Huvitume veel nendest argumendi väärtuste piirkondadest, kus argumendi väärtuste kasvades kas funktsiooni väärtused kasvavad või siis funktsiooni väärtused kahanevad. Neid piirkondi nimetatakse vastavalt funktsiooni **kasvamispiirkonnaks** ja **kahanemispiirkonnaks** ning tähistatakse $X\uparrow$ ja $X\downarrow$.

Meie näites $X\uparrow=\varnothing$ ja $X\downarrow=[0;\ 7{,}5[$.

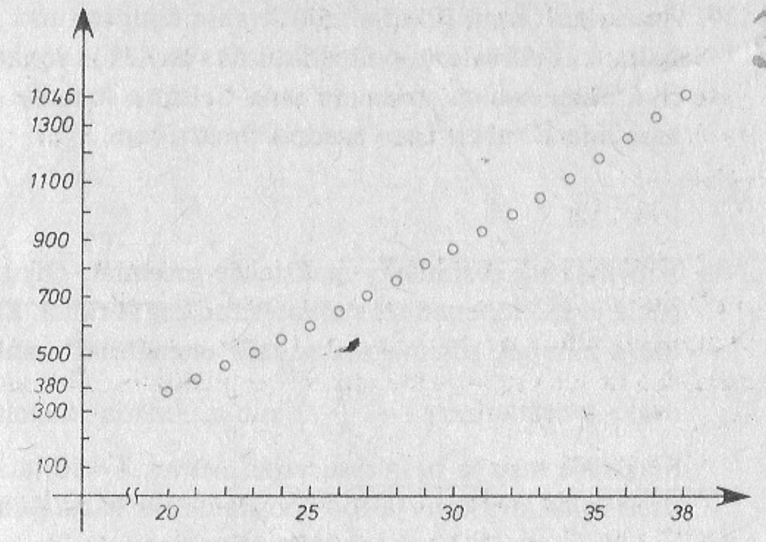
Joonisel 3.12 on uuritud funktsiooni graafik. Kokkuvõttes oleme me uurimise käigus matemaatiliselt kirja pannud järgmised iseenesestmõistetavad faktid. Küünal põleb kuni 7,5 tundi. Küünla pikkus on selle põlemise aja jooksul kogu aeg positiivne, välja arvatud ajahetk, millal küünal kustub. Küünla pikkus põlemise aja jooksul kogu aeg kahaneb.



Joonis 3.12

Näide 2. Ühes koolis on tavaks, et kooli aastapäeval vahetavad iga klassi õpilased omavahel fotosid. Kui õpilaste arv klassis on n, siis peab iga õpilane saama $n-1$ fotot. Seos ühes klassis vahetatavate fotode arvu m ja õpilaste arvu n vahel avaldub võrdusena

$$m=n(n-1) \Rightarrow m=n^2-n$$



Joonis 3.13

Uurime selle seosega määratud ruutfunktsiooni.

Et vahetatavate fotode arv otsustati kindlaks määrata klassi õpilaste arvu puhul 20-st kuni 38-ni, siis

$X=\{20,\ 21,\ 22\ \ldots,\ 38\}$

ja seega

$Y=\{380,\ 420,\ 462,\ \ldots,\ 1406\}$.

Edasi leiame, et selle funktsiooni korral $X^+=X$, $X_0=\varnothing$, $X^-=\varnothing$, $X\uparrow=X$ ja $X\downarrow=\varnothing$

Joonisel 3.13 on esitatud uuritud funktsiooni graafik. *Selgita neid uurimise tulemusi.*

A.

136. Leia funktsioonide $y=-3x+2$ ja $y=x^2-2x+3$ muutumispiirkonnad, kui on antud nende määramispiirkond

1) $X=\{-3;\ -1;\ 0;\ 2\}$; 2) $X=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$;

3) $X=\left\{-\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{3}\right\}$; 4) $X=\left\{x \mid x<-\frac{3}{2}\ x>\frac{5}{3}\right\}$.

137. Avalda valemina seos hulknurga diagonaalide arvu d ja tippude arvu n vahel. Uuri saadud funktsiooni, kui $3\leqslant n\leqslant 17$.

138. Keha jahutatakse temperatuurilt 37° kuni $-5°$ -ni ühtlaselt nii, et igas tunnis alaneb temperatuur kahe kraadi võrra. Avalda valemina seos aja t ja keha temperatuuri T vahel. Uuri saadud funktsiooni.

139. Ameerika Ühendriikides mõõdetakse temperatuuri Fahrenheiti kraadides, kus jää sulamistemperatuuriks on 32° ja vee keemistemperatuuriks 212°. Avalda valemina seos Celsiuse kraadile C ja Fahrenheiti kraadide F vahel. Uuri saadud funktsiooni.

B.

140. Tööviljakuse tõstmiseks makstakse preemiat. Olgu töötunni tasu m rubla ja töö lõpetamiseks planeeritud aeg A tundi. Kui tööline lõpetab töö a tunniga, siis makstakse talle ettenähtud tunnitasu am rubla ja lisaks preemia $am\left(1-\frac{a}{A}\right)$ rubla. Avalda valemina seos töölistele makstava tasu ja tunnitasu vahel, võttes $A=10$ ja $a=8$, samuti töölisele makstava tasu ja töö sooritamiseks kasutatud aja a vahel, kui $A=20$ ja $m=2$. Uuri saadud funktsioone.

1. LINEAARFUNKTSIOONI UURIMINE

Tutvume järgnevalt lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ uurimisega juhul, kui muutujatel ei ole konkreetset tähendust.

Kui täiendavaid tingimusi pole antud, siis saab lineaarfunktsiooni väärtusi leida iga reaalarvulise argumendi väärtuse korral, seega

$$X=\mathbf{R}$$

ja ka funktsiooni väärtusteks võivad olla kõik reaalarvud, s. t.

$$Y=\mathbf{R}.$$

Lahendades võrrandi

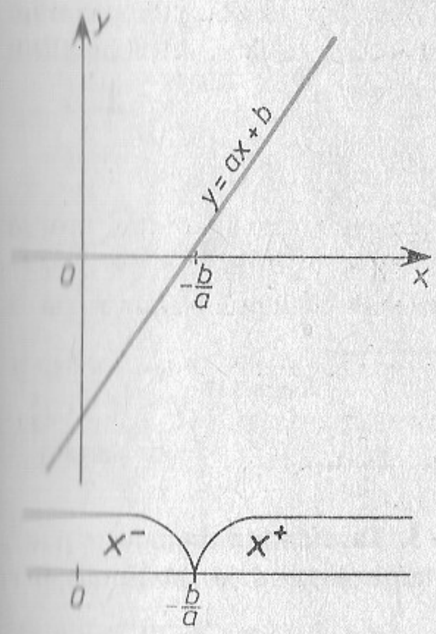
$$ax+b=0$$

leiame argumendi ainsa väärtuse $x=-\frac{b}{a}$, kus funktsiooni väärtus võrdub nulliga, s. t.

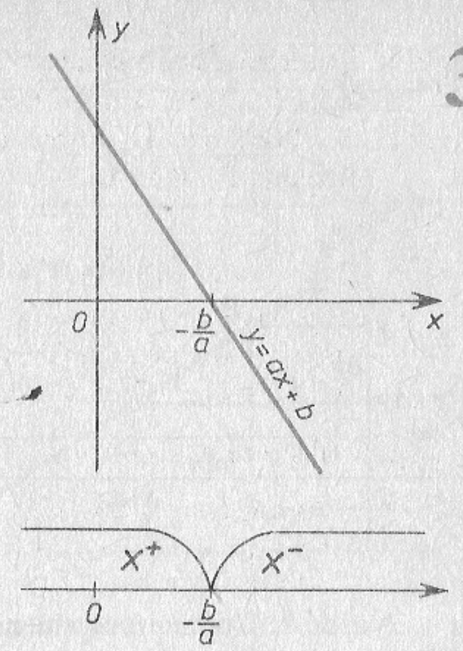
$$X_0=\left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

m Olgu $a>0$. Sel juhul on lineaarfunktsiooni graafikuks **tõusev sirge** (joon. 3.14), kusjuures

$$X^-=]-\infty;\ -\frac{b}{a}[\quad \text{ja} \quad X^+=]-\frac{b}{a};\ \infty[\,.$$



Joonis 3.14



Joonis 3.15

Juhul $a<0$ on lineaarfunktsiooni graafikuks **langev sirge** (joon. 3.15), kusjuures

$$X^-=]-\frac{b}{a};\ \infty[\quad \text{ja} \quad X^+=]-\infty;\ -\frac{b}{a}[\,.$$

Kui argument x muutub kui tahes väikese arvu Δx võrra, siis funktsioon muutub Δy võrra:

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)+b$$

ja siit

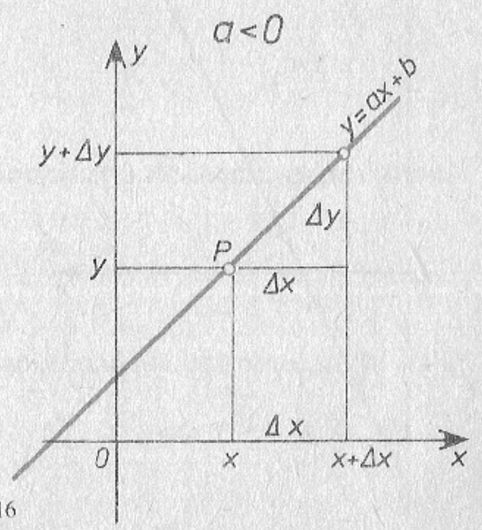
$$\Delta y=a(x+\Delta x)+b-y=a\cdot\Delta x.$$

Kui $\Delta x>0$, siis Δy märk sõltub a märgist. Nimelt juhul $a>0$ on $\Delta y>0$ (joon. 3.16), juhul $a<0$ aga $\Delta y<0$ (joon. 3.17). Seega, kui $a>0$, siis

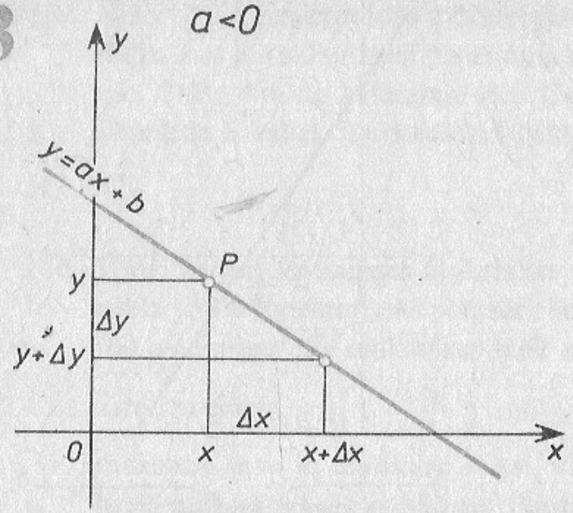
$$X\uparrow=X \text{ ja } X\downarrow=\varnothing,$$

kui aga $a<0$, siis

$$X\uparrow=\varnothing \text{ ja } X\downarrow=X.$$



Joonis 3.16



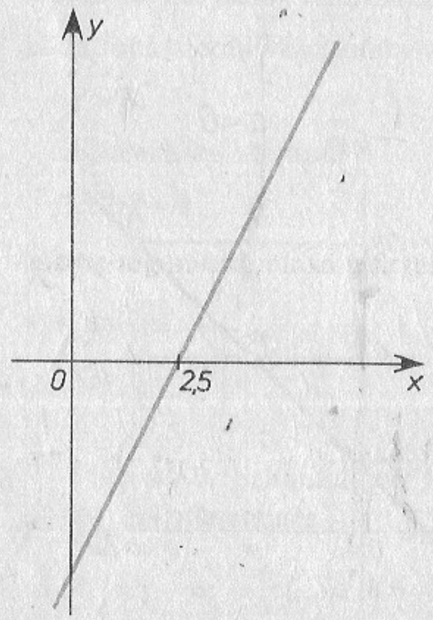
Joonis 3.17

Näide 1. Uurime funktsiooni $y=2x-5$. Täiendavate tingimuste puudumise tõttu hõlmavad funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond siin kogu reaalarvude hulga:

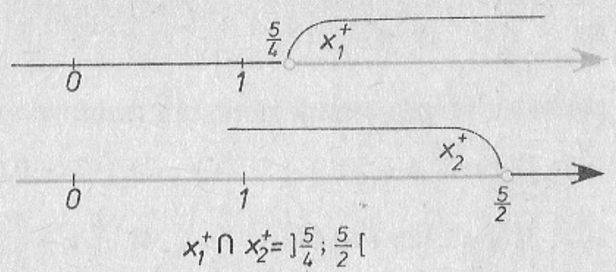
$X=Y=\mathbf{R}$.

Võrrandi $2x-5=0$ lahendamise teel leiame, et

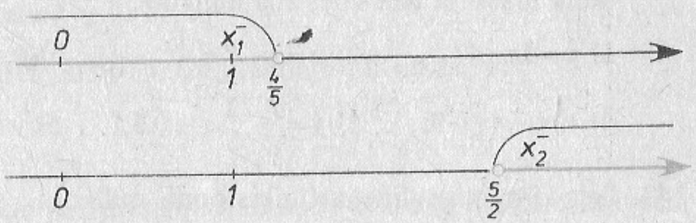
$X_0=\{2{,}5\}$.



Joonis 3.18



Joonis 3.19



Joonis 3.20

Et antud juhul $a=2>0$, siis

$X\uparrow=\mathbf{R}$, $X\downarrow=\varnothing$, $X^+=]2{,}5;\ \infty[$ ja $X^-=]-\infty;\ 2{,}5[$.

Uuritud funktsiooni graafik on esitatud joonisel 3.18.

Näide 2. Leiame lineaarfunktsioonide $y=4x-5$ ja $y=-2x+5$ positiivsuspiirkondade ühisosa ning negatiivsuspiirkondade ühisosa.

Esimese funktsiooni korral on

$$X_1^+=]\tfrac{5}{4};\ \infty[\text{ ja } X_1^-=]-\infty;\ \tfrac{5}{4}[,$$

teise funktsiooni korral aga

$$X_2^-=]\tfrac{5}{2};\ \infty[\text{ ja } X_2^+=]-\infty;\ \tfrac{5}{2}[.$$

Kanname need piirkonnad arvteljele. Jooniselt 3.19 näeme, et positiivsuspiirkondade ühisosaks on

$$X_1^+\cap X_2^+=]\tfrac{5}{4};\ \tfrac{5}{2}[,$$

jooniselt 3.20 aga selgub, et negatiivsuspiirkondade ühisosa on tühi hulk:

$X_1^-\cap X_2^-=\varnothing$.

141. Leia järgmise funktsiooni nullkoht:

1) $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}$; 2) $-3x+0{,}6y-\frac{2}{3}=0$;

3) $y=5{,}32x+10{,}64$; 4) $\frac{4}{5}x-\frac{7}{8}y+5{,}2=0$.

142. Tee vastavat võrrandit lahendamata kindlaks lineaarfunktsiooni nullkoha märk ja leia alles siis nullkoht:

1) $y=3x+7$; 2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$; 3) $y=-3{,}2x+2{,}4$;

4) $y=-4x+9$; 5) $y=-\frac{2}{5}x-0{,}3$; 6) $y=0{,}5x-\frac{3}{5}$.

143. Leia järgmise lineaarfunktsiooni nullkoht, positiivsuspiirkond ja negatiivsuspiirkond:

1) $y=2x+7$; 2) $y=-x+3$; 3) $y=-2x+3$;

4) $y=3x-5$; 5) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$; 6) $y=-0{,}4x+0{,}1$.

144. Tee kindlaks lineaarfunktsiooni nullkoht ja otsusta, kas funktsioon on kasvav või kahanev:

1) $y=-2x+1$; 2) $y=-0{,}462x+\frac{12}{533}$;

3) $y=3x-3$; 4) $y=\frac{63}{47}x-2{,}56$;

5) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 6) $y=x+5$.

145. Uuri lineaarfunktsiooni:

1) $y=\frac{1}{2}x+3$; 2) $y=2{,}5x-1{,}5$;

3) $y=-\frac{3}{2}x+4$; 4) $y=-0{,}2x-2{,}2$.

146. Teisenda võrrand sobivale kujule ja uuri saadud lineaarfunktsiooni:

1) $4x-6y+3=0$; 2) $\frac{15}{43}x-\frac{61}{18}y+1=0$;

3) $21x+46y-100=0$; 4) $-8{,}43x+9{,}34y+0{,}105=0$.

147. Selgita, missuguste parameetri m väärtuste korral on lineaarfunktsioon

$y=(m-2)x+2$

1) kasvav; 2) kahanev.

148. Selgita, missuguste parameetri p väärtuste korral on lineaarfunktsioon

$y=(-1-p)x-3$

1) kasvav; 2) kahanev.

149. Esita kaks lineaarfunktsiooni, mille kohta on teada, et

1) $X^+=]-\infty;\infty[$; 2) $X^+=\{x \mid x<1\}$;

3) $X^-=]5;\infty[$; 4) $X^-=\{x \mid x>-2\}$.

150. Leia funktsioonide positiivsuspiirkondade ühisosa ning negatiivsuspiirkondade ühisosa, kui funktsioonid on

1) $y=3x+5$ ja $y=2x+10$; 2) $y=-x+5$ ja $y=-2x+3$; 3) $y=4x+3$ ja $y=-3x+4$.

151. Tõlgenda järgmist võrratust kahe lineaarfunktsiooni positiivsuspiirkondade ja negatiivsuspiirkondade kaudu ning leia vastavate piirkondade ühisosa:

1) $\frac{x-3}{2x+1}>0$; 2) $\frac{5x+1}{x}>0$; 3) $\frac{-3x-7}{5x+6}>0$;

4) $\frac{2-3x}{2x+1}<0$; 5) $\frac{5x+2}{-3x+4}<0$; 6) $\frac{1+2x}{3-2x}<0$.

2. RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE

Kui täiendavaid tingimusi pole esitatud, siis on ruutfunktsioon $y=ax^2+bx+c$ (kus a, b ja c on konstandid ning $a\neq 0$) määratud argumendi kõigi reaalarvuliste väärtuste korral. Seega

$X=\mathbf{R}$.

Ruutfunktsiooni graafikuks on parabool. Olgu tema haripunktiks $H(x_h;\ y_h)$. Juhul $a>0$ (joon. 3.21) on siis

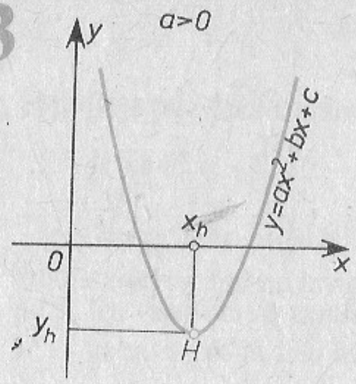
$Y=[y_h;\ \infty[$

ja juhul $a<0$ (joon. 3.22)

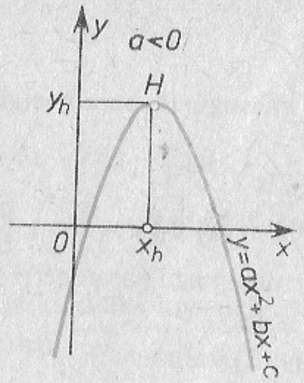
$Y=]-\infty;\ y_h]$.

Funktsiooni nullkohtade leidmiseks lahendame ruutvõrrandi

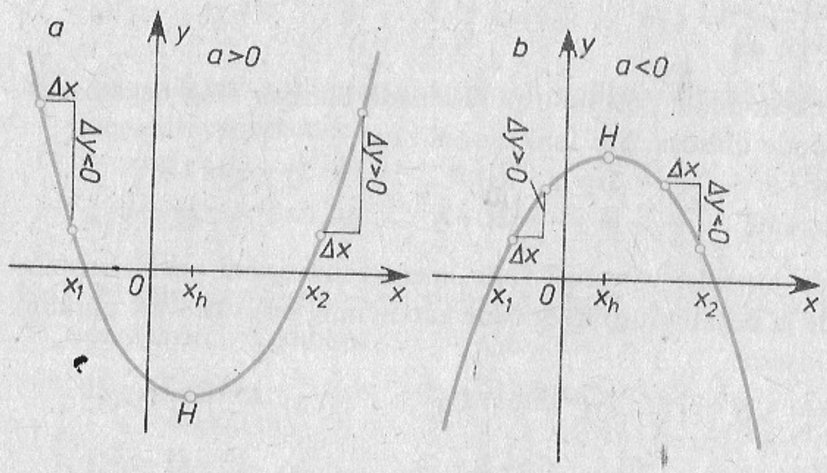
$ax^2+bx+c=0$.



Joonis 3.21



Joonis 3.22



Joonis 3.23

Selle ruutvõrrandi diskriminandi

$D=b^2-4ac$

märgist sõltub võrrandi lahendite arv: kui

1) $D>0$ (joon. 3.23), siis

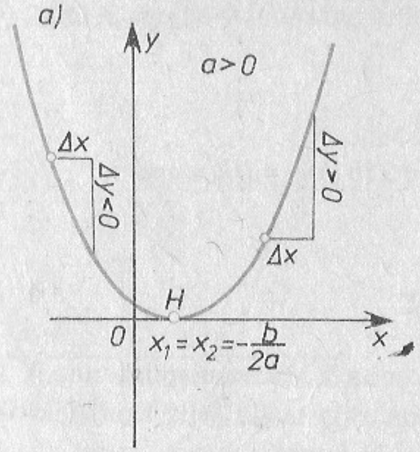
$$X_0=\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\};$$

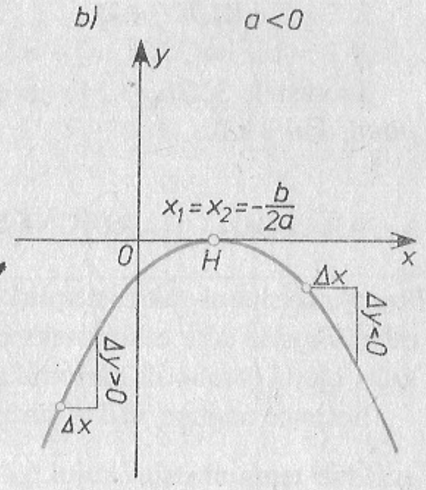
2) $D=0$ (joon. 3.24), siis

$$X_0=\left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

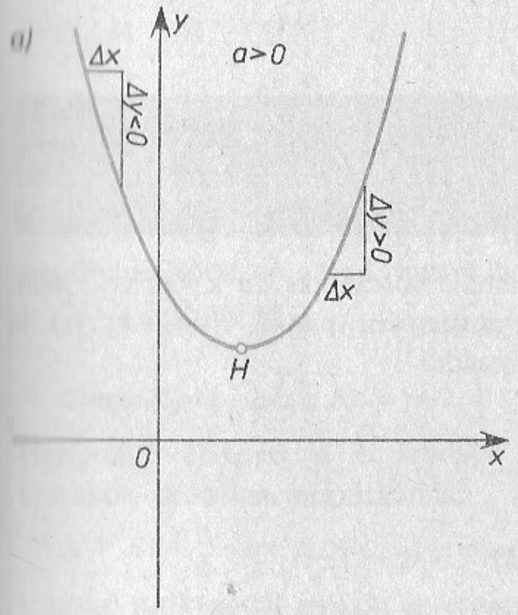
3) $D<0$ (joon. 3.25), siis $X_0=\varnothing$.

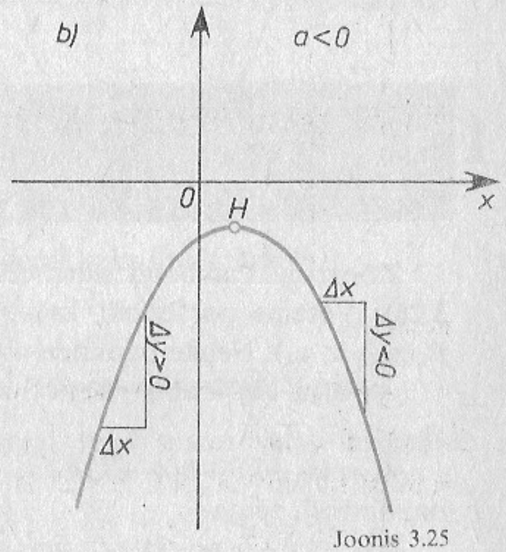
Tuginedes joonistele määrame nüüd ruutfunktsiooni positiivsuspiirkonna, negatiivsuspiirkonna, kasvamispiirkonna ning kahanemispiirkonna sõltuvalt a ja D märgist.





Joonis 3.24





Joonis 3.25

1) Olgu $a>0$ ja $D>0$. Sel juhul lõikub parabool x-teljega kahes punktis (joon. 3.23*a*), s. t. funktsioonil on kaks nullkohta x_1 ja x_2 ning

$X^+=]-\infty;\ x_1[\cup]x_2;\ \infty[$, $X^-=]x_1;\ x_2[$,

$X\uparrow=]x_h;\ \infty[$ (sest siin $\Delta x>0$ korral ka $\Delta y>0$),

$X\downarrow=]-\infty;\ x_h[$ (sest siin $\Delta x>0$ korral $\Delta y<0$).

2) Olgu $a>0$ ja $D=0$. Sel juhul parabool puudutab x-telge, funktsioonil on üksainus nullkoht, mis ühtib haripunkti abstsissiga x_h (joon. 3.24*a*) ning

$X^+=]-\infty;\ x_h[\cup]x_h;\ \infty[$, $X^-=\varnothing$,

$X\uparrow=]x_h;\ \infty[$, $X\downarrow=]-\infty;\ x_h[$.

3) Olgu $a>0$ ja $D<0$. Sel juhul parabool x-teljega ei lõiku (joon. 3.25*a*) ja

$X^+ = X = \mathbf{R}$, $X^- = \varnothing$,

$X\uparrow =]x_h;\ \infty[$, $X\downarrow =]-\infty;\ x_h[$.

Joonistelt 3.23*b*, 3.24*b* ja 3.35*b* *loe piirkonnad* X^+, X^-, $X\uparrow$, $X\downarrow$ *juhul, kui* $a<0$.

3. PARABOOLI HARIPUNKT

Ruutfunktsiooni väärtuste piirkonna Y, kasvamispiirkonna $X\uparrow$ ja kahanemispiirkonna $X\downarrow$ esitamiseks on vaja teada selle ruutfunktsiooni graafikuks oleva parabooli haripunkti H koordinaate x_h ja y_h.

Eespool nägime, et kui haripunkt paikneb x-teljel (s. t. kui $D=0$), siis avaldub tema abstsiss kujul $x_h = -\frac{b}{2a}$. Näitame, et see avaldis on sama iga parabooli $y=ax^2+bx+c$ korral.

Teoreem: **Parabooli $y=ax^2+bx+c$ haripunkti abstsiss on**

$$x_h = -\frac{b}{2a}.$$

Tõestus. Parabooli sümmeetriatelje võrrandiks on $x=x_h$ (vt. joon. 3.26). Võtame paraboolil kaks sümmeetrilist punkti $P_1(x_h-k;\ y_1)$ ja $P_2(x_h+k;\ y_1)$. Nende punktide ordinaadid

$y_1 = a(x_h-k)^2+b(x_h-k)+c$

ja

$y_2 = a(x_h+k)^2+b(x_h+k)+c$

on võrdsed, seega

$a(x_h-k)^2+b(x_h-k)+c = a(x_h+k)^2+b(x_h+k)+c.$

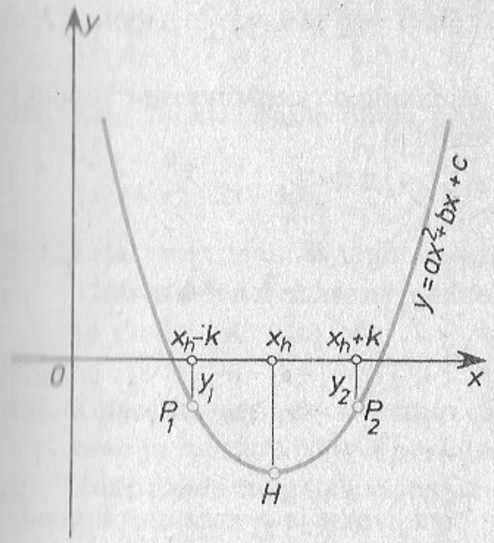
Sellest võrdusest avaldame x_h:

$ax_h^2-2ax_hk+ak^2+bx_h-bk = ax_h^2+2ax_hk+ak^2+bx_h+bk \Rightarrow -4ax_hk=2bk$

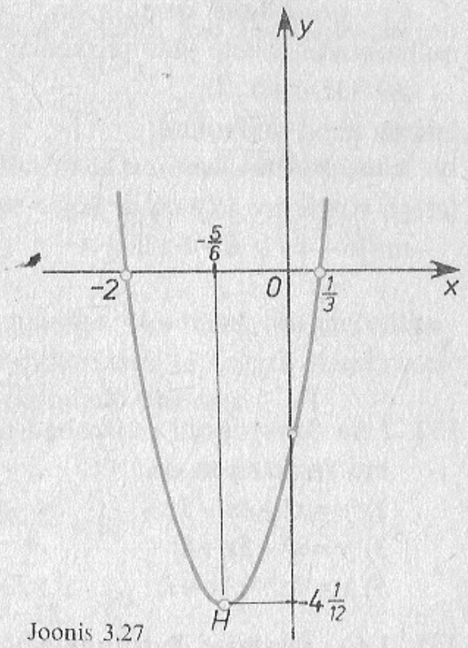
$\Rightarrow x_h = -\frac{b}{2a}$. ∎

Näide 1. Uurime funktsiooni $y=3x^2+5x-2$, mille korral $X=\boldsymbol{R}$. Et $x_h = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$, $y_h = -\frac{49}{12}$ ja $a=3>0$,

siis $Y = [-4\frac{1}{12};\ \infty[$.



Joonis 3.26



Joonis 3.27

Vastava ruutvõrrandi diskriminandi

$D=b^2-4ac=25-4\cdot 3\cdot(-2)=49>0$

positiivsuse tõttu on antud ruutfunktsioonil kaks nullkohta:

$x_{1,\,2} = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{6} \Rightarrow x_1=-2$ ja $x_2=\frac{1}{3}$.

Seega $X_0=\{-2,\frac{1}{3}\}$, $X^-=]-2,\frac{1}{3}[$ ja $X^+=]-\infty,\ -2[\cup]\frac{1}{3};\ \infty[$.

Haripunkti abstsissi ja x^2 kordaja märgi järgi saame välja kirjutada kasvamis- ja kahanemispiirkonna:

$X\uparrow =]-\frac{5}{6};\ \infty[$ ja $X\downarrow =]-\infty;\ -\frac{5}{6}[$.

Uuritud funktsiooni graafik on esitatud joonisel 3.27.

Näide 2. Selgitame, missuguste parameetri m väärtuste korral on ruutfunktsioonil

$y=x^2-(m-2)x+2m$

ainult positiivsed väärtused. Et siin $a=1>0$, siis on ruutfunktsioonil ainult positiivsed väärtused sel juhul, kui $D<0$. Tekkiva taandatud ruutvõrrandi diskriminant

$$D = \left(\frac{m-2}{2}\right)^2-2m = \frac{m^2-4m+4-8m}{4} = \frac{m^2-12m+4}{4}$$

on negatiivne siis, kui saadud murru lugeja on negatiivne.

Seega tuleb meil lahendada võrratus

$m^2-12m+4<0$.

Siin ruutliikme kordaja on $1>0$, järelikult on negatiivsuspiirkonnaks nullkohtade vahele jääv piirkond. Võrrandist

$m^2-12m+4=0$

leiame need nullkohad:

$m=6\pm\sqrt{36-4}=6\pm\sqrt{32}=6\pm4\sqrt{2}$.

Seega võrratuse ja samuti kogu vaadeldava ülesande lahendiks on:

$m\in]6-4\sqrt{2};\ 6+4\sqrt{2}[$.

A.

ü **152.** Leia funktsiooni nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kui funktsioon on

1) $y=x^2+2x-3$;
2) $y=x^2-2x-15$;
3) $y=x^2+5x+6$;
4) $y=x^2-5x+6$;
5) $y=2x^2-3x+2$;
6) $y=4x^2+6x-9$.

153. Leia järgmise ruutfunktsiooni graafiku haripunkti abstsiss ning funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkond:

1) $y=x^2+x-2$;
2) $y=x^2+2x-3$;
3) $y=x^2-8x+15$;
4) $y=-x^2-2x+15$;
5) $y=-5x^2+4x+1$;
6) $y=-6x^2-x+2$;
7) $y=3x^2-34x+11$;
8) $y=15x^2+38x+11$.

154. Uuri ruutfunktsiooni

1) $y=x^2-3x+5$;
2) $y=5x^2-10x+25$;
3) $y=-2x^2+3x-2$;
4) $y=-4x^2-6x+9$;
5) $y=3x^2-8x-3$;
6) $y=-3x^2+2x+8$;
7) $y=4x^2-4x-3$;
8) $y=-5x^2+4x-7$.

B.

155. Selgita, missuguse ruutfunktsiooni nullkohtade leidmisele taandub järgmise võrrandi lahendamine ja leia need nullkohad:

1) $x+2-\frac{6}{x+2}=1$;
2) $x+\frac{24}{x-1}=3x-4$;
3) $\frac{15}{x}-\frac{72-6x}{2x^2}=2$;
4) $3x^2=\frac{2}{5}\left(x+\frac{4}{5}\right)+2x^2$;
5) $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$;
6) $\frac{x+8}{x-8}-2=\frac{24}{x-4}$;

7) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$;
8) $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}$.

156. Leia funktsioonide ühine positiivsuspiirkond, kui funktsioonid on

1) $y=2x-1$ ja $y=x^2-2x-3$;
2) $y=-x^2+x+2$ ja $y=-x-1$.

157. Leia funktsioonide ühine negatiivsuspiirkond, kui funktsioonid on

1) $y=x-2$ ja $y=2x^2-4x-16$;
2) $y=-3x^2+2x+5$ ja $y=\frac{}{}x+3$.

158. Tõlgenda järgmise võrratuse lahendamise ülesannet lineaarfunktsiooni ja ruutfunktsiooni positiivsuspiirkondade ja negatiivsuspiirkondade kaudu ning leia vastavate piirkondade ühisosa:

1) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$;
2) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$;
3) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$;
4) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$;
5) $\frac{x^2-2x+1}{-x^2+9x-14}>0$;
6) $\frac{3x^2+2x+1}{6x^2-x-12}<0$.

159. Selgita, missuguste parameetri m väärtuste korral on järgmisel ruutfunktsioonil

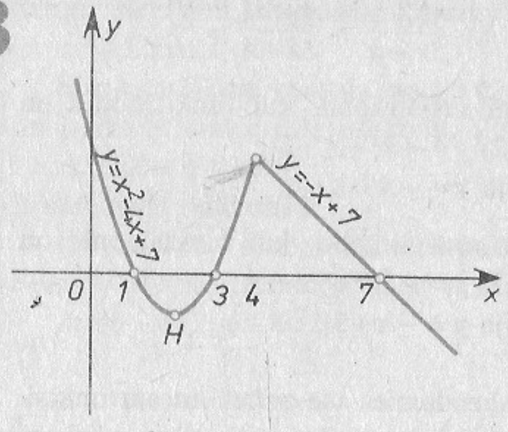
a) ainult positiivsed väärtused;
b) lisaks positiivsetele väärtustele ka üks nullkoht;
c) nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi:

1) $y=x^2+2x+m$;
2) $y=x^2-3x-m$;
3) $y=x^2+2x+m-10$;
4) $y=mx^2-10x-5$;
5) $y=(m+1)x^2-4x+3$;
6) $y=x^2+(m+3)x+6m-1$;
7) $y=(m-1)x^2-2(m+1)x+m$;
8) $y=x^2-(m-5)x-2-3m$.

4. MÄÄRAMISPIIRKONNA ERINEVATES OSADES ERINEVALT DEFINEERITUD FUNKTSIOONIDE UURIMINE

* Eeskiri, mille järgi leitakse funktsiooni väärtusi, võib määramispiirkonna eri osades olla antud erinevalt. Näiteks

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ kui } x<4, \\ -x+7, \text{ kui } x\geqslant 4. \end{cases}$$



Joonis 3.28

Selle funktsiooni uurimisel võib tugineda joonisele 3.28, kust järeldub, et

$X=\mathbf{R}$, $Y=\mathbf{R}$, $X_0=\{1;\ 3;\ 7\}$, $X^+=]-\infty;\ 1[\cup]3;\ 7[$, $X^-=]1;\ 3[\cup]7;\ \infty[$, $X\uparrow=]2;\ 4[$ ja $X\downarrow=]-\infty;\ 2[\cup]4;\ \infty[$. *

B.

160. Joonesta graafik ja uuri selle abil funktsiooni, mis on määratud seosega

1) $y=\begin{cases} 3x+1, \text{ kui } x<-1, \\ -2x-4, \text{ kui } -1\leqslant x<2, \\ -4x, \text{ kui } x\geqslant 2; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x^2-x, \text{ kui } x<1, \\ 1-x, \text{ kui } x\geqslant 1; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} 2x^2+x-3, \text{ kui } x\leqslant 0, \\ -x^2+x-3, \text{ kui } x>0. \end{cases}$

5. ABSOLUUTVÄÄRTUST SISALDAVATE LINEAARAVALDISTE JA RUUTKOLMLIIKMETE UURIMINE

* Järgnevalt tutvume funktsioonidega, kus funktsiooni määrav lineaaravaldis või ruutkolmliige sisaldab ka absoluutväärtuse märke. Sealjuures arvestame, et absoluutväärtuse definitsiooni kohaselt

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ kui } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ kui } a<0. \end{cases}$$

Näide 1. Uurime funktsiooni $y=|2x+1|$, mille võib kirjutada kujul

$$y=\begin{cases} 2x+1, \text{ kui } 2x+1\geqslant 0 \text{ ehk } x\geqslant -0{,}5, \\ -(2x+1), \text{ kui } 2x+1<0 \text{ ehk } x<-0{,}5. \end{cases}$$

Selle funktsiooni graafik on joonisel 3.29, millelt näeme, et

$X=\mathbf{R}$, $Y=[0;\ \infty[$, $X_0=\{-0{,}5\}$,
$X^+=]-\infty;\ -0{,}5[\cup]0{,}5;\ \infty[$, $X^-=\varnothing$,
$X\uparrow=]-0{,}5;\ \infty[$ ja $X\downarrow=]-\infty;\ -0{,}5[$.

Näide 2. Uurime funktsiooni $y=|3x-5|-2x+3$, ehk

$$y=\begin{cases} 3x-5-2x+3=x-2, \text{ kui } x\geqslant \frac{5}{3}. \\ -(3x-5)-2x+3=-5x+8, \text{ kui } x<\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Joonisel 3.30 on toodud selle funktsiooni graafik, kust järeldub, et

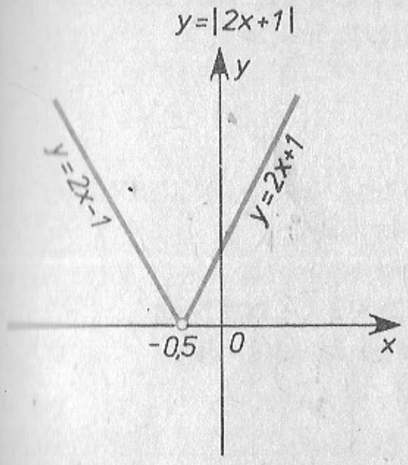
$X=\mathbf{R}$, $Y=[-\frac{1}{3};\ \infty[$, $X_0=\{\frac{8}{5};\ 2\}$,

$X^+=]-\infty;\ \frac{8}{5}[\cup]2;\ \infty[$, $X^-=]\frac{8}{5};\ 2[$,

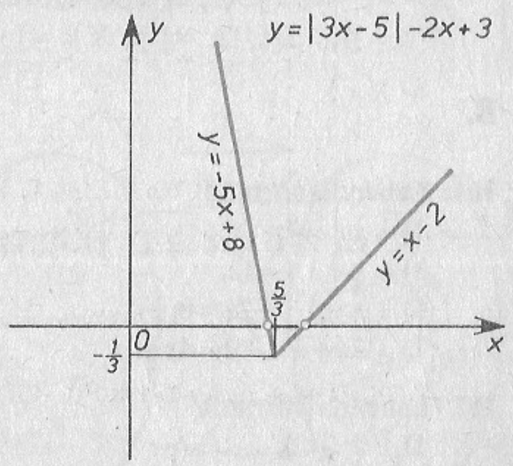
$X\uparrow=]\frac{5}{3};\ \infty[$ ja $X\downarrow=]-\infty;\ \frac{5}{3}[$.

Näide 3. Uurime funktsiooni

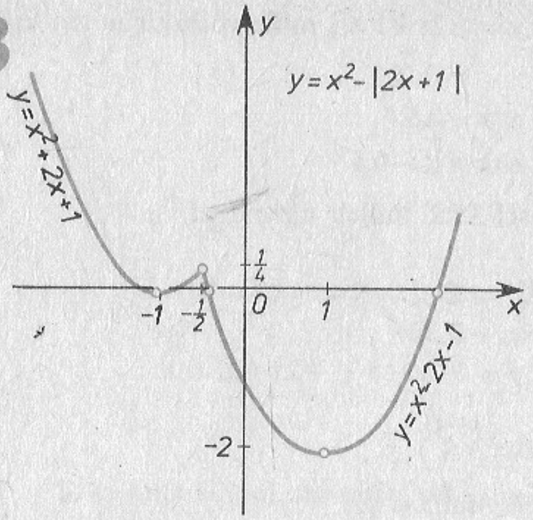
$$y=x^2-|2x+1|=\begin{cases} x^2-2x-1, \text{ kui } x\geqslant -\frac{1}{2}, \\ x^2+2x+1, \text{ kui } x<-\frac{1}{2}. \end{cases}$$



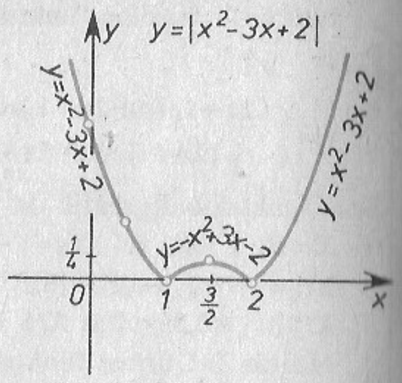
Joonis 3.29



Joonis 3.30



Joonis 3.31



Joonis 3.32

Selle funktsiooni graafik on joonisel 3.31, kust:

$X=\mathbf{R}$, $Y=[-2;\ \infty[$, $X_0=\{-1,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$,
$X^+=]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2};\ \infty[$,
$X^-=]1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}[$,
$X\uparrow=]-1;\ -\frac{1}{2}[\cup]1,\ \infty[$ ja $X\downarrow=]-\infty;\ -1[\cup]-\frac{1}{2};\ 1[$.

Näide 4. Uurime funktsiooni $y=|\,x^2-3x+2\,|$, ehk

$$y=\begin{cases} x^2-3x+2, \text{ kui } x\leqslant 1 \vee x\geqslant 2, \\ -(x^2-3x+2), \text{ kui } 1<x<2. \end{cases}$$

Selle funktsiooni graafik on joonisel 3.32, mille abil leiame:
$X=\mathbf{R}$, $Y=[0,\ \infty[$, $X_0=\{1,\ 2\}$,
$X^+=]-\infty;\ 1[\cup]1;\ 2[\cup]2;\ \infty[$, $X^-=\varnothing$,
$X\uparrow=]1;\ 1{,}5[\cup]2;\ \infty[$ ja $X\downarrow=]-\infty;\ 1[\cup]1{,}5;\ 2[$. *

B.

161. Lahenda võrrand
1) $|\,x\,|=7$;
2) $|\,3x\,|=12$;
3) $|\,x+3\,|=12$;
4) $|\,3x+3\,|=12$;
5) $|\,x-3\,|+2x=0$;
6) $|\,2x-3\,|-3x+1=0$;
7) $|\,2x+3\,|-2=4x+1$;
8) $5x-|\,2x+1\,|=8$.

162. Lahenda võrratus
1) $|\,x\,|<5$;
2) $|\,2x\,|>5$;
3) $|\,x-3\,|<5$;
4) $|\,2x-3\,|>5$;
5) $|\,5x-6\,|<4$;
6) $|\,3-5x\,|>2$;
7) $|\,x+1\,|-2x<5$;
8) $|\,2x+3\,|-1>2x$.

163. Lahenda võrrand
1) $x^2-|\,5x-4\,|=0$;
2) $x^2+|\,x-2\,|=0$;
3) $3x^2-|\,8x+3\,|=0$;
4) $4x^2+|\,19x+12\,|=0$.

164. Lahenda võrratus
1) $x^2-|\,12x+15\,|>0$;
2) $x^2-|\,2x+48\,|<0$;
3) $3x^2+|\,2x-9\,|>0$;
4) $5x^2+|\,1-8x\,|<0$.

165. Uuri järgmise võrdusega määratud funktsiooni tema graafiku abil:
1) $y=|\,x-2\,|$;
2) $y=|\,2x-5\,|$;
3) $y=|\,4-3x\,|+2$;
4) $y=|\,1-2x\,|-2x$;
5) $y=|\,2x+6\,|-x+1$;
6) $y=|\,x-1\,|+|\,3-2x\,|$.

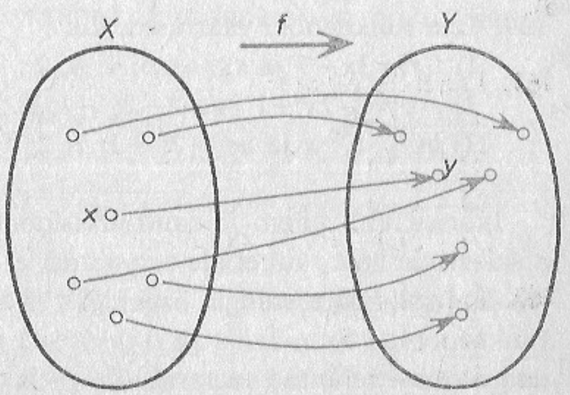
166. Uuri järgmise võrdusega määratud funktsiooni tema graafiku abil:
1) $y=x^2-|\,11x-28\,|$;
2) $y=x^2+|\,13x+30\,|$;
3) $y=|\,2x^2-x-4\,|$;
4) $y=|\,2x^2-6x+3\,|$.

3.3. FUNKTSIOONI UURIMISE ÜLESANNE

Seni oleme lähemalt tundma õppinud vaid lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ ja ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$. Funktsioone määravaid võrdusi leidub aga väga palju, näiteks

$y=x^3+x^2$, $y=\sqrt{x+1}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x^2+1}{x-2}$ jne.

Kerkib küsimus, mida tähendab üldine mõiste — **funktsioon**, mille erijuhtudeks on kõik siin nimetatud funktsioonid.



Joonis 3.33

m

Olgu antud kaks hulka X ja Y (joon. 3.33). Kui hulga X igale elemendile x on seatud vastavusse hulga Y üks kindel element y, siis öeldakse, et hulgal X on määratud funktsioon.

Hulka X nimetatakse selle funktsiooni **määramispiirkonnaks.** Määramispiirkonna kõigile elementidele vastavusse seatud elementide hulka nimetatakse funktsiooni **muutumispiirkonnaks.**

Funktsiooni määramispiirkonna mis tahes elementi x nimetatakse selle funktsiooni **argumendiks** ja hulka X kuuluvaid arve **argumendi väärtusteks.** Seega on funktsiooni määramispiirkond argumendi väärtuste hulk, muutumispiirkond aga funktsiooni kõigi väärtuste hulk.

Funktsiooni määravat vastavust märgitakse üles sümbolitega

$x \xrightarrow{f} y$, $f : x \to f(x)$, $f : X \to Y$, või ka võrdusega

$y = f(x)$,

kus $x \in X$, $y \in Y$ ja f on eeskiri, mis argumendi igale väärtusele x seab vastavusse funktsiooni väärtuse $y = f(x)$. Viimast tähistusviisi on ka siin õpikus kasutatud.

Kirjutised $f(a)$, $f(2)$ tähendavad hulga Y neid elemente, mis vastavad hulga X elementidele a ja 2. Niisiis, $f(a)$ on funktsiooni väärtus kohal a ja $f(2)$ on funktsiooni väärtus kohal 2.

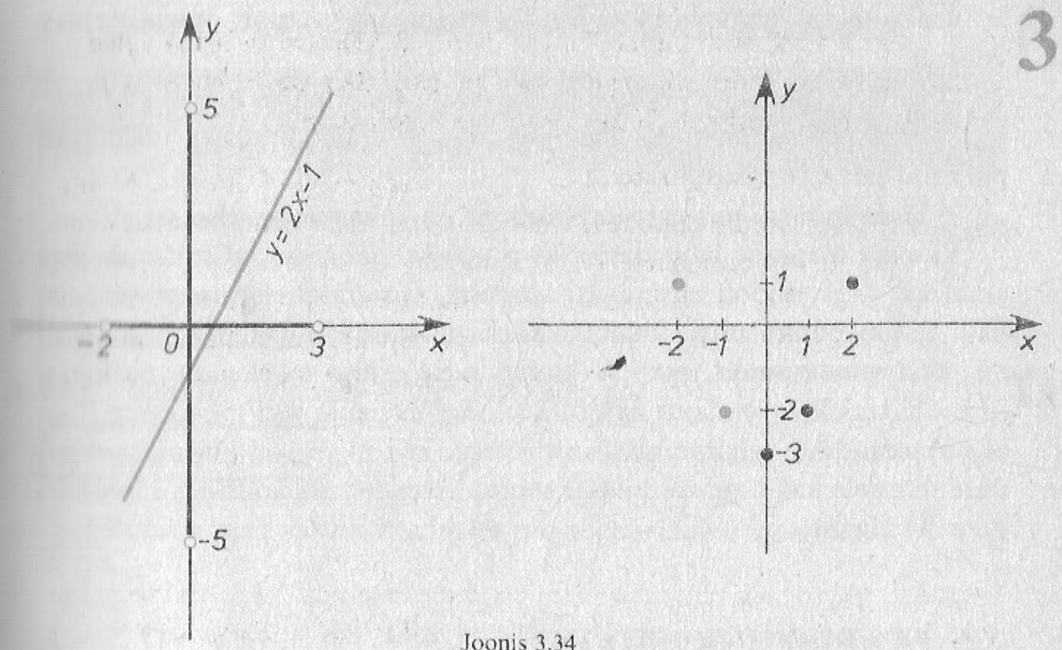
A.

ü **167.** On antud funktsioon $f(x) = 2x + 1$. Leia
1) $f(1)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(0)$; 5) $f(-2)$; 6) $f(1{,}5)$.

168. On antud funktsioon $g(x) = x^2 - 2x$. Leia
1) $g(0)$; 2) $g(1)$; 3) $g(-1)$; 4) $g(2)$; 5) $g(-5)$; 6) $g(-3)$.

169. Leia funktsiooni väärtused, kui
1) $f(x) = 3x - 7$ ja $x \in \{-0{,}5;\ 1;\ 0;\ 2\}$;
2) $g(x) = -2x^2 + 1$ ja $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$;
3) $h(x) = 5 : x$ ja $x \in \{-2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 5\}$.

Lineaarfunktsiooni ja ruutfunktsiooni määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk, kui ei ole ette antud, et need funktsioonid on määratud reaalarvude hulga mingil osahulgal. Näiteks joonisel 3.34 on esitatud funktsioonide $f(x) = 2x - 1$ ja $f(x) = x^2 - 3$ graafikud, kui määramispiirkondadena on ette antud vastavalt $X = [-2;\ 3]$ ja $X = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.



Joonis 3.34

Määramispiirkonnaks võib aga olla reaalarvude hulga mingi osahulk kas sel põhjusel, et hulkade X ja Y vahelist vastavust määrav valem ei võimalda leida igale reaalarvule vastavat funktsiooni väärtust. Näiteks

1) valemist $y = \frac{1}{x-1}$ ei saa leida argumendi väärtusele 1 vastavat funktsiooni väärtust;

2) valemist $y = \sqrt{x+3}$ ei saa leida funktsiooni väärtust siis, kui $x < -3$. Esimesel juhul arv 1 ja teisel juhul kõik arvud hulgast $\{x \mid x < -3\}$ ei saa kuuluda funktsiooni määramispiirkonda.

A.

170. Leia funktsiooni määramispiirkond, kui funktsioon on määratud võrdusega ü

1) $y = 7x - 1$;
2) $y = 2x^2 + 3x$;
3) $y = \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \frac{x-1}{x-2}$;
5) $y = \frac{2}{3x+5}$;
6) $y = \frac{1}{x^2-1}$;
7) $y = \sqrt{x-1}$;
8) $y = \sqrt{3x+6}$;
9) $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}}$;
10) $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$;
11) $y = \sqrt{(x+2)^2}$;
12) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

3 Seni oleme funktsiooni uurimise käigus lahendanud järgmisi ülesandeid:

1) leida funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond;

2) leida funktsiooni nullkohad ning teha nende abil kindlaks positiivsuspiirkond ja negatiivsuspiirkond;

3) leida funktsiooni kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

Viimase ülesande lahendamiseks ruutfunktsiooni korral leidsime tema graafiku — parabooli haripunkti abstsissi, mis eraldas otsitavad piirkonnad. Selline punkt, mis eraldab kasvamispiirkonda kahanemispiirkonnast, nn. **ekstreemumpunkt,** saab X klassis meie erilise tähelepanu osaliseks. Siin, IX klassis, täiendame aga funktsiooni uurimist veel mõningate sümmeetriaomaduste selgitamise ülesannetega, mis tuginevad kujundi peegelduse mõistele kas sirge või punkti suhtes. (Nende peegeldustega tutvusime juba VI klassis.)

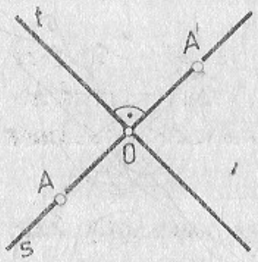
3.4. PAARISFUNKTSIOON

1. PUNKTI PEEGELDUS SIRGE SUHTES

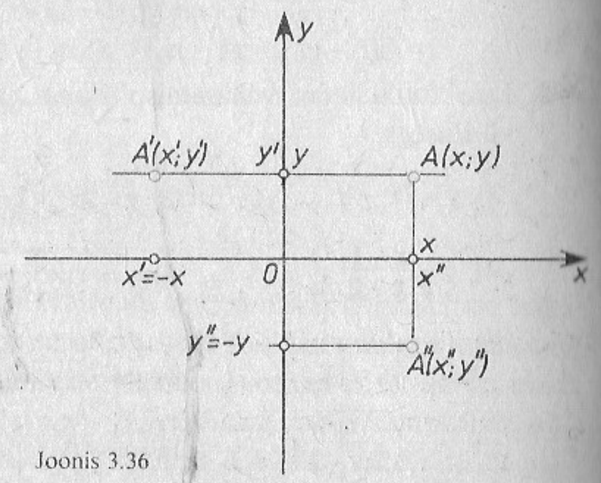
Punkti A **kujutise** leidmiseks peegeldamisel sirge t suhtes tõmbame läbi punkti A sirge s nii, et $s \perp t$ (joon. 3.35). Lõikugu sirged s ja t punktis O. Sirgel s märgime sellise punkti A', et

$$AO = OA'.$$

Punkt A' ongi punkti A kujutiseks peegeldamisel sirge t suhtes. Punkti A' nimetatakse punkti A **peegelduseks** ja sirget t **peegeldusteljeks.** Mõnikord nimetatakse punkte A ja A' ka **sümmeetriliseks** sirge t suhtes ning sirget t **sümmeetriateljeks.**



Joonis 3.35



Joonis 3.36

Tuginedes toodud kirjeldusele anname järgmise definitsiooni:

punkti A peegelduseks sirget t suhtes on punkt A', kui $AA' \perp t$ ja $AO = OA'$, kus $t \cap AA' = \{O\}$.

Olgu koordinaatteljestikus antud punkt $A(x; y)$ (joon. 3.36). Tema peegelduseks y-telje suhtes on punkt $A'(x'; y')$ siis, kui

$$\boxed{x' = -x \text{ ja } y' = y} \quad .$$

ning x-telje suhtes punkt $A''(x''; y'')$ siis, kui

$$\boxed{x'' = x \text{ ja } y'' = -y} \quad .$$

Põhjenda neid väiteid tuginedes peegelduse definitsioonile.

A.

171. Leia antud sirglõiguga AB koordinaattelgede suhtes sümmeetrilised sirglõigud $A'B'$ ja $A''B''$ ning võrdle lõikude AB, $A'B'$ ja $A''B''$ pikkusi, kui antud punktid on
1) $A(1; 2)$ ja $B(3; 5)$; 2) $A(-2; -4)$ ja $B(-5; 1)$;
3) $A(-3; -2)$ ja $B(-1; -5)$; 4) $A(3; -1)$ ja $B(5; -5)$.

172. Leia antud kolmnurga ABC koordinaattelgede suhtes sümmeetrilised kolmnurgad ning võrdle kolmnurga ja tema peegelduste ümbermõõtusid, kui antud punktid on
1) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ ja $C(3; 5)$;
2) $A(-2; 3)$, $B(2; 5)$ ja $C(3; -2)$;
3) $A(-3; -2)$, $B(-1; 5)$ ja $C(2; -4)$.

B.

173. On antud punktid $A(2; 5)$, $B(-3; 2)$, $C(-1; -3)$ ja $D(5; -2)$. Leia nende punktidega määratud nelinurgaga x- ja y-telje suhtes sümmeetriliste nelinurkade tippude koordinaadid. Joonesta antud nelinurk ja tema peegeldused.

174. On antud punktid $A(3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-3; 0)$, $D(-2; -4)$ ja $E(2; -4)$. Leia nende punktidega määratud viisnurgaga x- ja y-telje suhtes sümmeetriliste viisnurkade tippude koordinaadid. Joonesta antud viisnurk ja tema peegeldused.

3 2. FUNKTSIOONI GRAAFIKU PEEGELDUSED KOORDINAATTELGEDE SUHTES

Peegeldame funktsiooni $y=f(x)$ graafikut y-telje suhtes. Sel juhul graafiku mis tahes punkti $P(x;\ y)$ peegelduseks on punkt $P'(x';\ y')$, kus $y'=y$ ja $x'=-x$ (joon. 3.37). Seega funktsiooni $y=f(x)$ graafiku peegelduseks on funktsiooni $y'=f(x')$, s. t. funktsiooni $y=f(-x)$ graafik.

Punkti $P(x;\ y)$ peegelduseks x-telje suhtes on punkt $P''(x'';\ y'')$, kus $y''=-y$ ja $x''=x$. Seega funktsiooni $y=f(x)$ graafiku peegelduseks on funktsiooni $-y=f(x)$ ehk $y=-f(x)$ graafik.

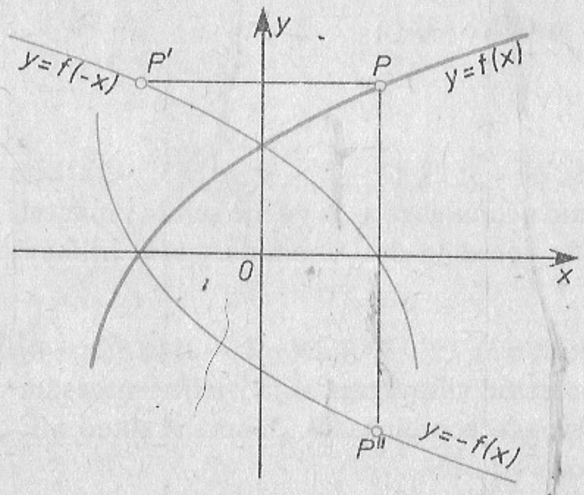
Niisiis: funktsiooni $y=f(x)$ graafiku peegelduseks ordinaattelje suhtes on funktsiooni $y=f(-x)$ graafik ja abstsisstelje suhtes funktsiooni $y=-f(x)$ graafik.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y=2x-1$ graafiku peegeldused koordinaattelgede suhtes.

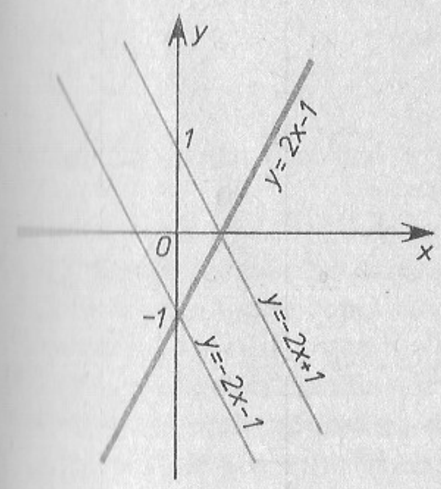
Funktsiooni $y=2x-1$ graafikuks on sirge. Peegeldamisel ordinaatteljest saame peegelduseks sirge $y=2(-x)-1$ ehk $y=-2x-1$ ja peegeldamisel abstsissteljest sirge $y=-(2x-1)$ ehk $y=-2x+1$.

Seega funktsiooni $y=2x-1$ graafiku peegelduseks ordinaattelje suhtes on funktsiooni $y=-2x-1$ graafik ja peegelduseks abstsisstelje suhtes funktsiooni $y=-2x+1$ graafik (joon. 3.38).

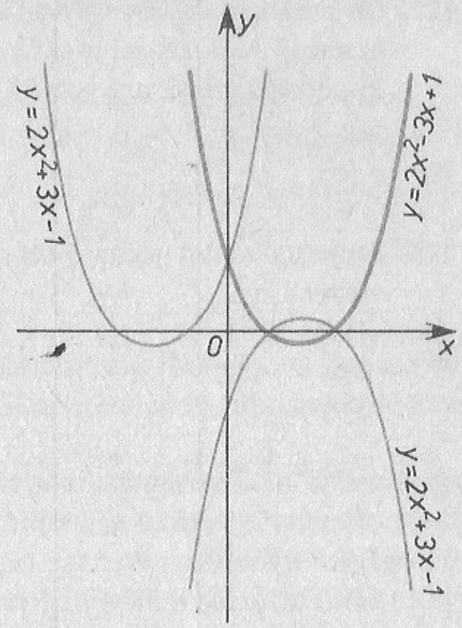
Näide 2. Leiame funktsiooni $y=2x^2-3x+1$ graafiku peegeldused koordinaattelgedest.



Joonis 3.37



Joonis 3.38



Joonis 3.39

Funktsiooni $y=2x^2-3x+1$ graafikuks on parabool. Tema peegelduseks ordinaatteljest on parabool $y=2(-x)^2-3(-x)+1$ ehk $y=2x^2+3x+1$ ja peegelduseks abstsissteljest parabool $y=-(2x^2-3x+1)$ ehk $y=-2x^2+3x-1$.

Seega funktsiooni $y=2x^2-3x+1$ graafiku peegelduseks ordinaattelje suhtes on funktsiooni $y=2x^2+3x+1$ graafik ja abstsisstelje suhtes funktsiooni $y=-2x^2+3x-1$ graafik (joon. 3.39).

A.

175. Leia funktsioonid, mille graafikuteks on antud funktsiooni graafiku peegeldused x-teljest ja y-teljest, kui antud funktsioon on

1) $y=x+3$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=-3x-2$;

4) $y=x^2+4$; 5) $y=\frac{x^2}{2}+1$; 6) $y=-x^2-2$;

7) $y=2x^2-3x$; 8) $y=-3x^2+2x-1$; 9) $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$.

176. On antud funktsioon $y=3x+5$. Leia punkt, kus lõikuvad

1) antud funktsiooni graafik ja selle peegeldus x-teljest;

2) antud funktsiooni graafik ja selle peegeldus y-teljest.

177. On antud funktsioon $y=-2x-7$. Leia punkt, kus lõikuvad
1) antud funktsiooni graafik ja selle peegeldus x-teljest;
2) antud funktsiooni graafik ja selle peegeldus y-teljest.

B.

178. Joonesta antud joone peegeldus nii x- kui ka y-teljest, kui joone võrrand on

1) $x=3$;
2) $y=5$;
3) $x=-2$;
4) $y=-1$;
5) $y=x$;
6) $y=-x$;
7) $y=\frac{1}{2}x+3$;
8) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$;
9) $y=x^2+x+2$;
10) $y=-2x^2+3x-1$;
11) $x^2+y^2=25$;
12) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$;
13) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$;
14) $(x+4)^2+y^2=4$.

3. PAARISFUNKTSIOON JA SELLE GRAAFIK

Kui funktsiooni $y=f(x)$ väärtused kohtadel $-x$ ja x on iga $x\in X$ korral võrdsed, s. t. kui

$$f(-x)=f(x),$$

siis nimetatakse seda funktsiooni paarisfunktsiooniks.

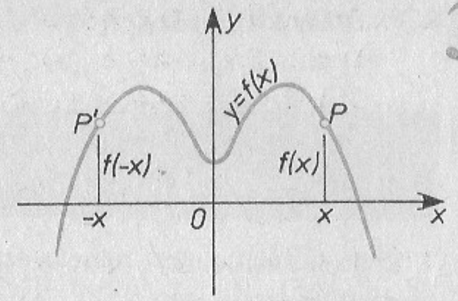
Näiteks rahuldavad seda definitsiooni funktsioonid $y=ax^2$ ja $y=ax^2+C$. Tõepoolest, $a(-x)^2=ax^2$ ja $a(-x)^2+c=ax^2+c$.

Seega **funktsioonid $y=ax^2$ ja $y=ax^2+c$ on paarisfunktsioonid.**

Seevastu üldine ruutfunktsioon $y=ax^2+bx+c$, kui $b\neq 0$, ei rahulda vaadeldavat tingimust. Tõepoolest, $a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2-bx+c$ ja üldiselt $ax^2+bx+c\neq ax^2-bx+c$.

Seega **funktsioon $y=ax^2+bx+c$ ei ole paarisfunktsioon.**

Teoreem. **Paarisfunktsiooni $y=f(x)$ graafik on sümmeetriline ordinaattelje suhtes.**



Joonis 3.40

* **Tõestus.** Eeldame, et iga x korral kehtib võrdus $f(x)=f(-x)$ (joon. 3.40) ja väidame, et funktsiooni $y=f(x)$ graafikul leidub igale tema punktile sümmeetriline punkt ordinaattelje suhtes.

Nagu eespool selgitasime, on kaks punkti sümmeetrilised ordinaattelje suhtes siis, kui nende ordinaadid on võrdsed ja abstsissid erinevad ainult märgi poolest. Seega tuleb meil näidata, et paarisfunktsiooni $y=f(x)$ graafiku mis tahes punktiga $P(x;\ f(x))$ ordinaattelje suhtes sümmeetriline punkt $P'(-x;\ f(x))$ asetseb samal graafikul.

Antud funktsiooni graafikul leidub punkt $Q(-x;\ f(-x))$. Eelduse põhjal aga $f(-x)=f(x)$ ja seega punkt P' ühtib punktiga Q. ■ *

Tõestatud teoreemi illustreerimiseks lisame, et eespool näidetena toodud paarisfunktsioonide $y=ax^2$ ja $y=ax^2+c$ graafikud, nagu teada, on y-telje suhtes sümmeetrilised paraboolid. Seevastu aga funktsiooni $y=ax^2+bx+c$ (kus $b\neq 0$) graafik ei ole y-telje suhtes sümeetriline parabool.

A.

179. Selgita, missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid:

1) $y=3x^2$;
2) $y=3x$;
3) $y=\frac{3}{x}$;
4) $y=x^2+5$;
5) $y=-x^2+2$;
6) $y=x^2-3$;
7) $y=x^2+5x$;
8) $y=-x^2-2x$;
9) $y=x^2-3x+3$.

B.

180. On teada, et funktsioon $y=f(x)$ on paarisfunktsioon. Selgita, missugused järgmistest funktsioonidest on sel juhul samuti paarisfunktsioonid:

1) $y=x^2f(x)$;
2) $y=xf(x)$;
3) $y=x^2+f(x)$;
4) $y=x^2f(x)+2$;
5) $y=xf(x)-x$;
7) $y=x^2+2f(x)$.

3.4. PAARISARVULISE ASTENDAJAGA ASTMEFUNKTSIOON

Funktsioone $y=x^n$, kus $n\in\mathbf{Z}^+$, nimetatakse astmefunktsioonideks.

Seni tunneme neist näiteks astmefunktsiooni $y=x^2$. See funktsioon on paarisfunktsioon, sest $x^2=(-x)^2$. Tema graafikuks on ordinaattelje suhtes sümmeetriline parabool.

Joonisel 3.41 on kujutatud funktsiooni $y=x^4$ graafik. Näeme, et ka see graafik on sümmeetriline ordinaattelje suhtes. Tõepoolest, iga x korral kehtib võrdus $x^4=(-x)^4$. Seega funktsioon $y=x^4$ on paarisfunktsioon.

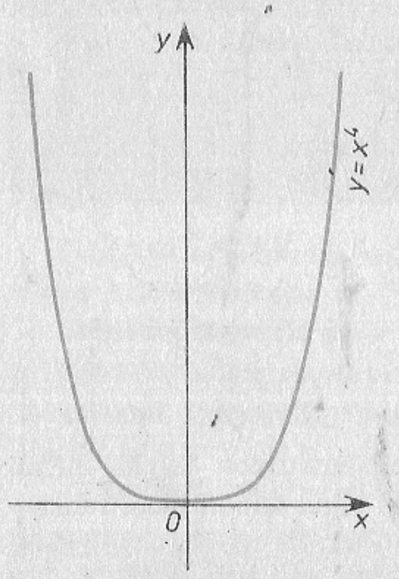
Olgu astmefunktsiooni $y=x^n$ astendajaks mistahes paarisarv $n=2k$, kus $k\in\mathbf{Z}^+$. Ikka kehtib võrdus

$$x^{2k}=(-x)^{2k}.$$

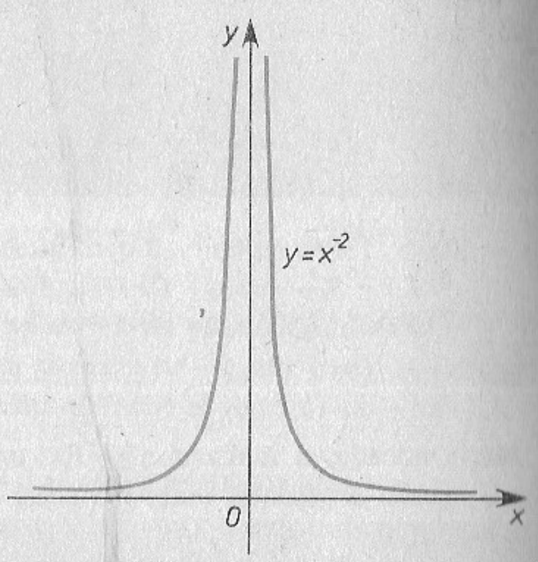
Järelikult: **kõik paarisarvulise astendajaga astmefunktsioonid on paarisfunktsioonid.**

Kuidas asetsevad nende graafikud ordinaattelje suhtes?

Avalda nende funktsioonide nullkohtade hulk X_0, positiivsuspiirkond X^+, negatiivsuspiirkond X^-, kasvamispiirkond $X\uparrow$ ja kahanemispiirkond $X\downarrow$.



Joonis 3.41



Joonis 3.42

A.

181. Missuguse funktsiooni graafikuks on paarisarvulise astendajaga astmefunktsiooni $y=x^{2k}$ graafiku peegeldus x-telje suhtes?

B.

182. Kuidas avalduvad üldisema astmefunktsiooni $y=ax^n$ (kus n on paarisarv) positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond ja nullkohtade hulk, kui a) $a>0$, b) $a<0$? Kas need funktsioonid on paarisfunktsioonid?

183. Joonisel 3.42 on kujutatud funktsiooni $y=x^{-2}$ graafik. Esita hulgad X^+, X^- ja X_0. Leia kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond. Kas see funktsioon on paarisfunktsioon?

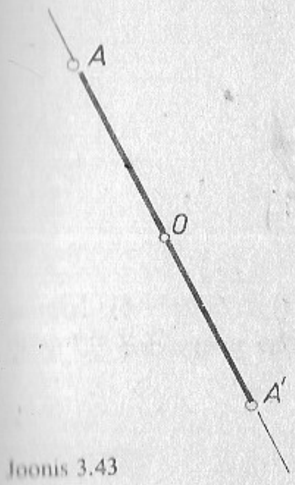
3.5. PAARITU FUNKTSIOON

1. PUNKTI PEEGELDUS PUNKTI SUHTES

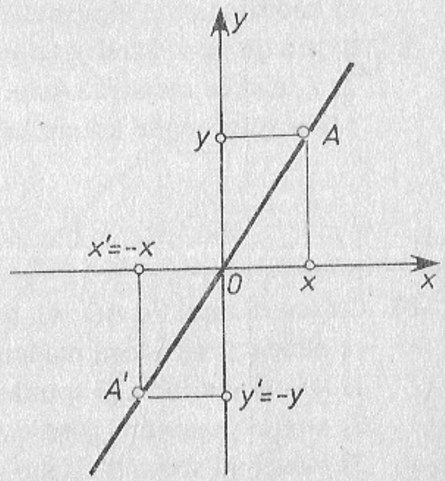
Punkti A **kujutise** leidmiseks peegeldamisel punkti O suhtes (joon. 3.43) pikendame lõiku AO üle otspunkti O kuni punktini A' nii, et

$$AO=OA'.$$

Punkti O nimetatakse **peegelduspunktiks** ja punkti A' nimetatakse punkti A **peegelduseks** punkti O suhtes. Punkti A ja A' nimetatakse ka **sümmeetrilisteks** punkti O suhtes ning punkti O **sümmeetriakeskpunktiks.**



Joonis 3.43



Joonis 3.44

Niisiis: **punkti A kujutiseks peegeldamisel punkti O suhtes on punkt A', kui punktid A, O ja A' asetsevad ühel sirgel ning $AO = OA'$.**

Olgu koordinaatteljestikus antud punkt $A(x; y)$ (joon. 3.44). Tema peegelduseks koordinaatide alguspunkti O suhtes on punkt $A'(x'; y')$ siis, kui

$$x' = -x \text{ ja } y' = -y .$$

Põhjenda seda väidet tuginedes peegelduse definitsioonile.

A.

184. Leia antud sirglõiguga AB koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline sirglõik $A'B'$ ning võrdle sirglõikude AB ja $A'B'$ pikkusi, kui antud punktid on

1) $A(2; 1)$ ja $B(3; 5)$;
2) $A(-2; 3)$ ja $B(-1; 3)$;
3) $A(-3; -2)$ ja $B(-1; 4)$;
4) $A(3; -1)$ ja $B(4; -3)$.

185. Leia antud kolmnurgaga ABC koordinaatide alguspunktide suhtes sümmeetriline kolmnurk $A'B'C'$, võrdle kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ ümbermõõtusid ning tõesta, et need kolmnurgad on kongruentsed, kui antud punktid on

1) $A(3; 2)$, $B(-2; 1)$ ja $C(-3; -5)$;
2) $A(-3; 3)$, $B(-4; -5)$ ja $C(2; 1)$;
3) $A(3; -4)$, $B(-2; 5)$ ja $C(3; 6)$.

186. On antud punktid $A(2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(0; 5)$, $D(-3; 3)$ ja $E(-1; 0)$. Joonesta nende punktidega määratud viisnurk ja tema peegeldus

1) koordinaatide alguspunkti suhtes;
2) x-telje ja seejärel y-telje suhtes;
3) y-telje ja seejärel x-telje suhtes.

Mida võid nende kolme kujutise kohta öelda?

B.

187. On antud punktid $A(1; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(-3; -1)$ ja $D(2; -4)$. Joonesta nende punktidega määratud nelinurk ja tema peegeldus

1) koordinaatide alguspunkti suhtes;
2) x-telje ja seejärel y-telje suhtes;
3) y-telje ja seejärel x-telje suhtes.

188. Leia antud punktidega määratud kolmnurga peegeldused punktide $P(3; 2)$ ja $Q(-2; 1)$ suhetes, kui antud punktid on

1) $A(2; 5)$, $B(3; 6)$ ja $C(4; 1)$;
2) $A(0; 0)$, $B(-2; 0)$ ja $C(0; -5)$;
3) $A(1; 1)$, $B(-3; 4)$ ja $C(2; -3)$;
4) $A(-5; 0)$, $B(0; -3)$ ja $C(1; 4)$.

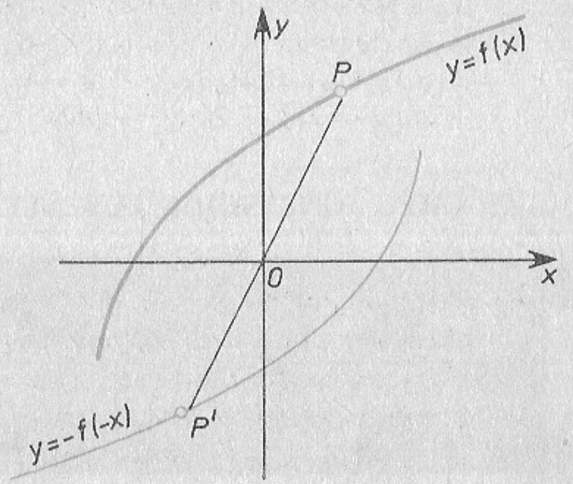
2. FUNKTSIOONI GRAAFIKU PEEGELDUS KOORDINAATIDE ALGUSPUNKTI SUHTES

Olgu funktsiooni $y = f(x)$ graafiku mistahes punkt $P(x; y)$ ja tema kujutiseks peegeldamisel koordinaatide alguspunkti suhtes $P'(x'; y')$ (joon. 3.45). Antud funktsiooni graafiku kujutiseks on seega funktsiooni $y' = f(x')$ graafik. Et $x' = -x$ ja $y' = -y$, siis see kujutis on funktsiooni $-y = f(-x)$ ehk $y = -f(-x)$ graafik.

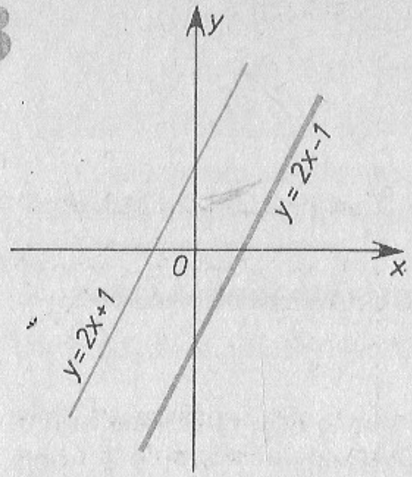
Niisiis: **funktsiooni $y = f(x)$ graafiku kujutiseks peegeldamisel koordinaatide alguspunkti suhtes on funktsiooni $y = -f(-x)$ graafik.**

Näide 1. Funktsiooni $y = 2x - 1$ graafiku peegelduseks koordinaatide alguspunkti suhtes on funktsiooni $y = -(2(-x) - 1)$ ehk $y = 2x + 1$ graafik. Antud sirge peegelduseks koordinaatide alguspunkti suhtes on seega temaga paralleelne sirge (joon. 3.46).

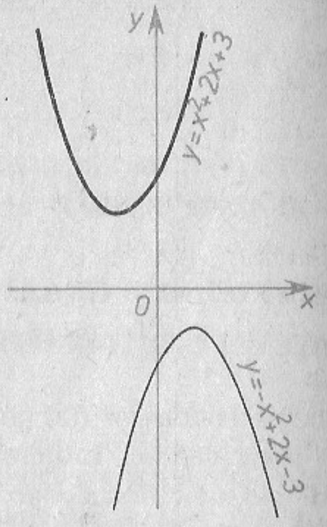
Näide 2. Funktsiooni $y = x^2 + 2x + 3$ graafiku peegelduseks koordinaatide alguspunkti suhtes on funktsiooni $y = -((-x)^2 + 2(-x) + 3)$ ehk $y = -x^2 + 2x - 3$ graafik (joon. 3.47).



Joonis 3.45



Joonis 3.46



Joonis 3.47

A.

189. Leia funktsioon, mille graafikuks on antud funktsiooni graafiku peegeldus koordinaatide alguspunkti suhtes, kui antud funktsioon on

1) $y=3x+2$; 2) $y=-4x+5$; 3) $y=-x-2$;
4) $y=x^2$; 5) $y=-x^2+2$; 6) $y=x^2+4x-5$.

B.

190. Peegelda joont koordinaatide alguspunkti suhtes:

1) $y=2$; 2) $x=3$;
3) $y=-4$; 4) $x=0$;
5) $(x-2)^2+(y+1)^2=36$; 6) $(x+1)^2+(y-5)^2=49$.

3. PAARITU FUNKTSIOON JA SELLE GRAAFIK

Kui funktsiooni $y=f(x)$ väärtused kohtadel $-x$ ja x iga $x\in X$ korral erinevad ainult märgi poolest, s. t. kui

$$f(-x)=-f(x),$$

siis seda funktsiooni nimetatakse paarituks funktsiooniks.

Näiteks rahuldavad toodud definitsiooni funktsioonid $y=ax$, $y=ax^3$ ja $y=\frac{a}{x}$. Tõepoolest, $a(-x)=-ax$,

$a(-x)^3=-ax^3$, $\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}$.

Seega **funktsioonid $y=ax$, $y=ax^3$ ja $y=\frac{a}{x}$ on paaritud funktsioonid.**

Seevastu näiteks funktsioonid $y=ax^2+bx+c$ ja $y=ax+b$, kus kõik kordajad on nullist erinevad, ei ole paaritud funktsioonid, sest

$a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2-bx+c\neq-(ax^2+bx+c)$,

$a(-x)+b=-ax+b\neq-(ax+b)$.

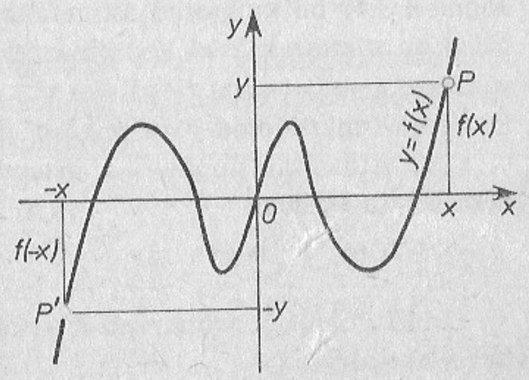
Paneme ühtlasi tähele, et need funktsioonid ei ole ka paarisfunktsioonid. Seega leidub funktsioone, mis (erinevalt täisarvudest!) pole ei paaris ega paaritud.

Tõestame nüüd, et paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes ehk, teisiti öeldes, on iseenda peegelduseks koordinaatide alguspunkti suhtes.

***Teoreem.* Paaritu funktsiooni $y=f(x)$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.**

* Tõestus. Eeldame, et iga x korral kehtib võrdus $f(-x)=-f(x)$ ja väidame, et funktsiooni $y=f(x)$ graafikul leidub igale tema punktile sümmeetriline punkt koordinaatide alguspunkti O suhtes.

Kaks punkti on teatavasti sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes siis, kui nende abstsissid ja ordinaadid erinevad ainult märgi poolest. Seega tuleb meil näidata, et paaritu funktsiooni $y=f(x)$ graafiku mistahes punktiga $P(x;\ f(x))$ koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline punkt $P'(-x;\ -f(x))$ asetseb samal graafikul.



Joonis 3.48

Antud funktsiooni graafikul leidub punkt $Q(-x;\ f(-x))$. Eelduse põhjal aga $f(-x)=-f(x)$ ja seega punkt P' ühtib punktiga Q (joon. 3.48). *

Tõestatud teoreemi illustreerimiseks lisame, et eespool näidetena toodud funktsioonide $y=ax$, $y=ax^3$ ja $y=\frac{a}{x}$ graafikud, nagu teame, on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Seevastu aga funktsioonide $y=ax+b$ ja $y=ax^2+bx+c$ (kus kõik kordajad on nullist erinevad) graafikud ei ole sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes.

A.

191. Selgita, missugused järgmistest funktsioonidest on paaritud funktsioonid:

1) $y=2x$; 2) $y=2x^2$; 3) $y=3x^3$;
4) $y=2x+3$; 5) $y=2x^2+3x$; 6) $y=3x^3+x$;
7) $y=\frac{4}{x}$; 8) $y=x^2+\frac{1}{x}$; 9) $y=x^3-\frac{1}{x}$.

B.

192. On teada, et funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon. Selgita, missugused järgmistest funktsioonidest on sel juhul paaritud funktsioonid:

1) $y=xf(x)$; 2) $y=x^2f(x)$; 3) $y=\frac{f(x)}{x}$;
4) $y=x^3f(x)$; 5) $y=2f(x)+x^2$; 6) $y=3f(x)+x^3$.

4. PAARITUARVULISE ASTENDAJAGA ASTMEFUNKTSIOON

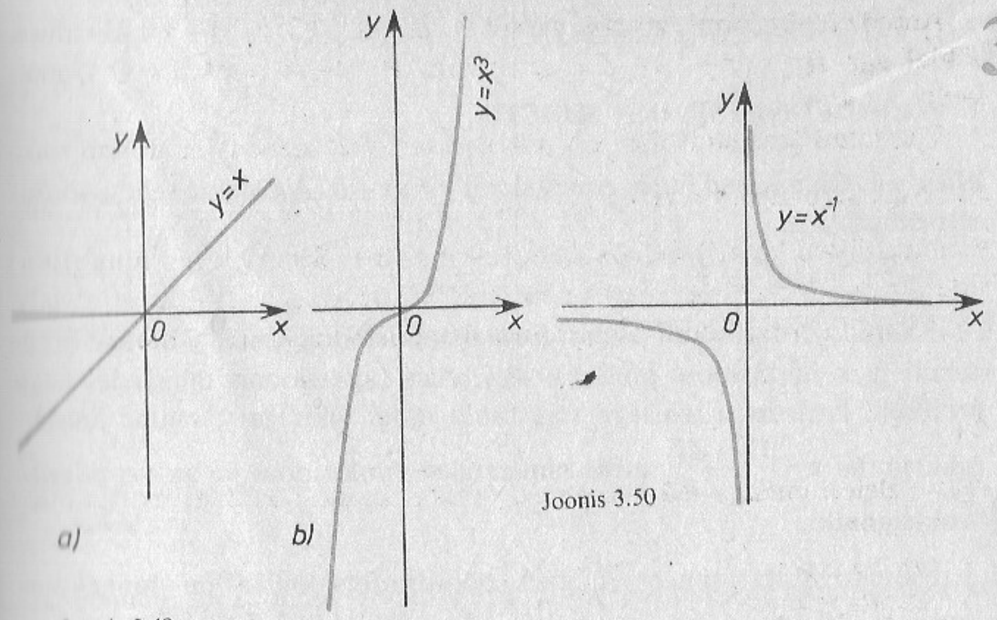
Joonisel 3.49 on kujutatud astmefunktsioonide $y=x$ ja $y=x^3$ graafikud. Need on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes, sest kehtivad võrdused $(-x)=-x$ ja $(-x)^3=-x^3$.

Seega **funktsioonid $y=x$ ja $y=x^3$ on paaritud funktsioonid.**

Olgu astmefunktsiooni $y=x^n$ astendaja mis tahes paaritu arv $n=2k+1$. Ikka kehtib võrdus

$$(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}.$$

Järelikult **kõik paarituarvulise asendajaga astmefunktsioonid on paaritud funktsioonid.**



Joonis 3.49

Joonis 3.50

Kuidas asetsevad nende funktsioonide graafikud koordinaatide alguspunkti suhtes?

Avalda nende funktsioonide positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond, nullkohtade hulk, kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

A.

193. Kuidas avalduvad üldisema astmefunktsiooni $y=ax^n$ (kus n on paaritu arv), positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond ja nullkohtade hulk, samuti kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond, kui a) $a>0$, b) $a<0$? Kas need funktsioonid on paaritud funktsioonid?

B.

194. Joonisel 3.50 on kujutatud funktsiooni $y=x^{-1}$ graafik. Esitada hulgad X^+, X^-, X_0. Kas see funktsioon on paaritu funktsioon? Leia kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

3.6. PÖÖRDFUNKTSIOON

1. PÖÖRDFUNKTSIOONI MÕISTE

Näide 1. Olgu antud lineaarfunktsioon $y=ax+b$. Avaldame sellest võrdusest muutuja x:

$$x=\frac{y-b}{a} \text{ ehk } x=\frac{1}{a}\,y-\frac{b}{a}.$$

Saadud võrdus esitab samuti lineaarfunktsiooni, ainult y on siin argumendi ja x funktsiooni tähiseks. Kui selles funktsioonis tähistada, nagu tavaliselt, argumenti tähisega x ja funktsiooni tähisega y, saame lineaarfunktsiooni $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$, mida nimetatakse funktsiooni $y=ax+b$ **pöördfunktsiooniks.**

Näiteks funktsiooni $y=\frac{1}{3}x-1$ pöördfunktsiooniks on funktsioon $y=3x+3$ (joon. 3.51).

Näide 2. Olgu antud ruutfunktsioon $y=x^2$. Avaldame sellest võrdusest muutuja x:

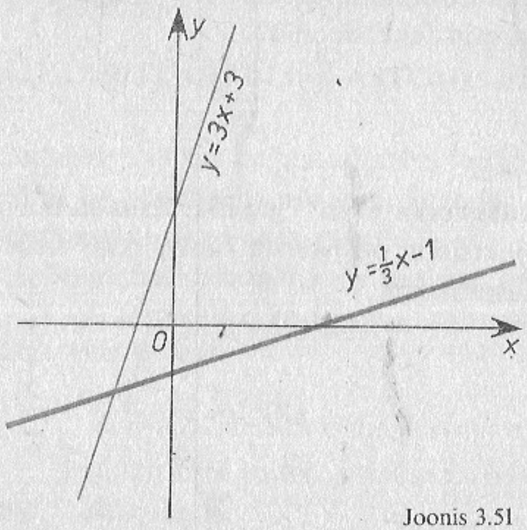
$x=\pm\sqrt{y}$.

Vahetades siin muutujate tähiseid, saame

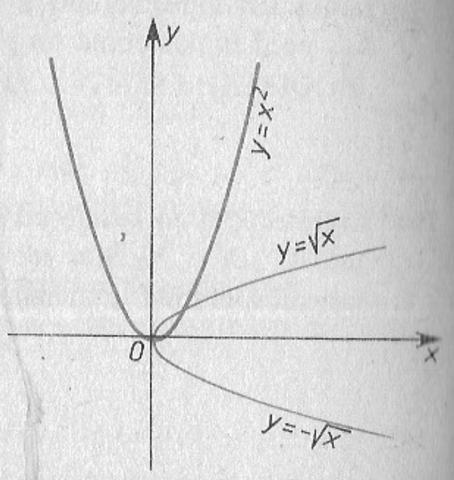
$y=\pm\sqrt{x}$ (joon. 3.52).

Igale mittenegatiivsele x-i väärtusele vastab nüüd kaks y-i väärtust. Seega viimane võrdus esitab kaht funktsiooni.

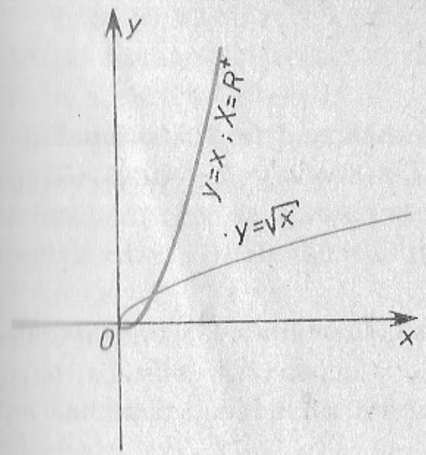
Lineaarfunktsiooni korral on nii funktsiooni määramispiirkonnaks X kui ka muutumispiirkonnaks Y reaalarvude hulk $\mathbf{R}$, s. t. $X=Y=\mathbf{R}$. Ruut-



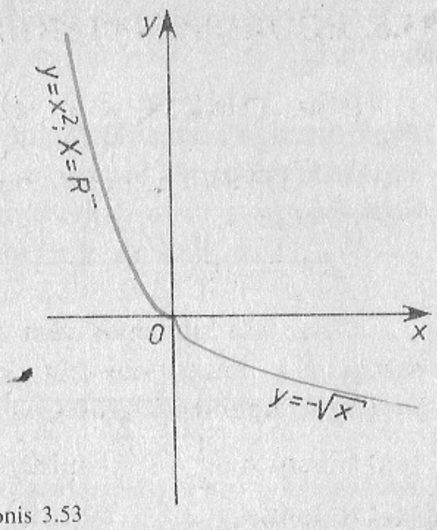
Joonis 3.51



Joonis 3.52



Joonis 3.54



Joonis 3.53

funktsiooni $y=x^2$ puhul $X=\mathbf{R}$, aga muutumispiirkonnaks on mittenegatiivsete reaalarvude hulk, s. t. $Y=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$. Lineaarfunktsiooni puhul leiab määramispiirkonna ja muutumispiirkonna elementide vahel aset üksühene vastavus. Ruutfunktsiooni $y=x^2$ puhul selline vastavus puudub, sest näiteks argumendi väärtustele x ja $-x$ vastab üks ja seesama funktsiooni väärtus.

Üldiselt, kui funktsiooni $y=f(x)$ määramispiirkonnaks on X ja muutumispiirkonnaks Y ning funktsioon määrab hulkade X ja Y elementide vahel üksühese vastavuse, siis funktsiooni $y=g(x)$, mis saadakse antud võrdusest $y=f(x)$ pärast muutuja x avaldamist ($x=g(y)$) ja muutujate tähiste vahetamist, nimetatakse antud funktsiooni pöördfunktsiooniks.

Näide 2 (järg). Jaotades funktsiooni $y=x^2$ kaheks funktsiooniks, võttes ühe määramispiirkonnaks $\mathbf{R}^+$ ja teise määramispiirkonnaks $\mathbf{R}^-\cup\{0\}$, saame neile mõlemale leida pöördfunktsiooni. Tõepoolest, funktsiooni $y=x^2$, kus $X=\mathbf{R}^+$, pöördfunktsiooniks on funktsioon $y=\sqrt{x}$ (joon. 3.53); seevastu aga funktsiooni $y=x^2$, kus $X=\mathbf{R}^-\cup\{0\}$, pöördfunktsiooniks on funktsioon $y=-\sqrt{x}$ (joon. 3.54).

A.

195. Esita, kui võimalik, järgmise funktsiooni pöördfunktsioon:

1) $y=3x+5$; 2) $y=-2x+1$; 3) $y=-8x-5$;
4) $y=3x^2$; 5) $y=x^2-3$; 6) $y=2x^2+7$.

196. Esita, kui võimalik, järgmise tabeliga määratud funktsiooni pöördfunktsioon:

1)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5 ;

2)

x	-3	-1	1	3
y	-2	2	2	-2 ;

3)

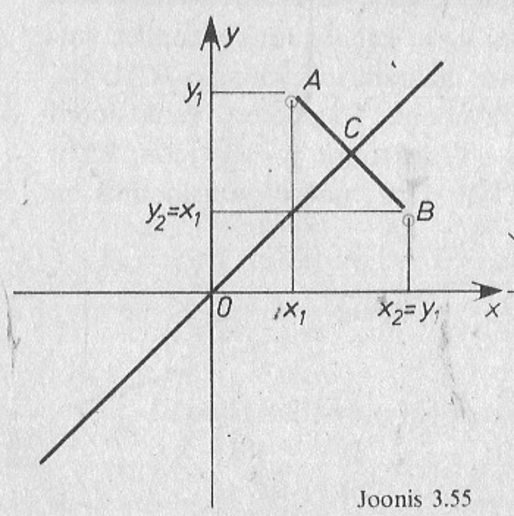
x	-3	-2	-1	1	2
y	2	1	0	-1	-2 .

2. PUNKTI KUJUTIS PEEGELDAMISEL SIRGE $y=x$ SUHTES

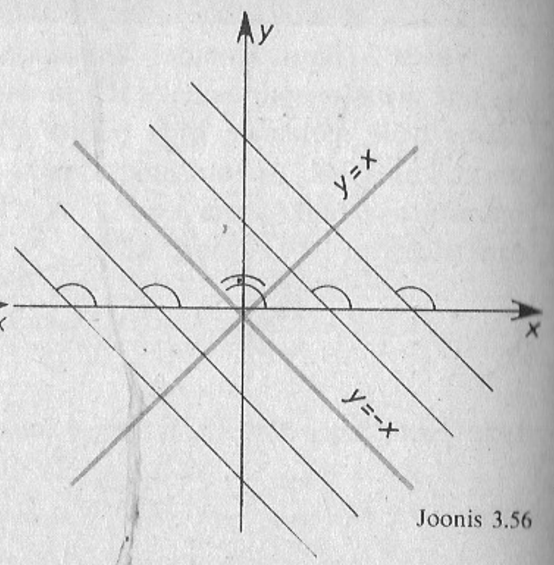
Teoreem. **Kui väljaspool sirget $y=x$ asetsevate punktide A ja B koordinaadid on vahetatud, siis need punktid osutuvad teineteise peegelduseks sirge $y=x$ suhtes.**

Tõestus. Olgu antud punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ (joon. 3.55), mille kohta eeldame, et

$x_1=y_2$ ja $x_2=y_1$.



Joonis 3.55



Joonis 3.56

Tuleb tõestada, et $AB \perp OC$ ja $AC=CB$ (vt. lk. 101).

Selleks näitame kõigepealt, et sirgel, mis läbib punkti A ja on risti sirgega $y=x$, asetseb ka punkt B.

Teame, et sirged $y=x$ ja $y=-x$ on risti. Et sirgega $y=x$ ristuvad sirged on kõik omavahel paralleelsed (joon. 3.56), siis on neil kõigil võrdsed tõusunurgad ja seega ka võrdsed tõusud. Seega huvitab meid sirge, mis läbib punkti $A(x_1; y_1)$ ja mille tõus on -1. Selle sirge võrrand on

$y-y_1=(-1)(x-x_1)$.

Punkti $B(y_1; x_1)$ koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, sest

$x_1-y_1=(-1)(y_1-x_1)$.

Järelikult punkt B asetseb tõepoolest punkti A läbival ja sirgega $y=x$ ristuval sirgel.

Näitame nüüd, et lõigu AB keskpunkt C asetseb sirgel $y=x$. Lõigu keskpunkti koordinaadid avalduvad lõigu otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetiliste keskmistena. Seega lõigu AB keskpunkti koordinaadid on

$\frac{x_1+y_1}{2}$ ja $\frac{y_1+x_1}{2}$.

Et need koordinaadid on võrdsed, siis rahuldavad nad võrrandit $y=x$. Seega, punkt $C\left(\frac{x_1+y_1}{2}; \frac{y_1+x_1}{2}\right)$ asetseb sirgel $y=x$ ja võrdus $AC=CB$ kehtib. ∎

A.

197. Esita sirglõik ja selle peegeldus sirgest $y=x$ ning võrdle sirglõigu ja tema peegelduse pikkusi, kui sirglõik on määratud oma otspunktidega

1) $A(3; 5)$ ja $B(2; 0)$;
2) $C(-3; -1)$ ja $D(0; -3)$;
3) $E(4; -1)$ ja $F(-3; 2)$;
4) $G(1; 1)$ ja $H(3; 3)$;
5) $I(3; -3)$ ja $J(-3; 3)$;
6) $K(2; 3)$ ja $L(2; -4)$.

198. Joonesta kolmnurk ABC ja selle peegeldus sirgest $y=x$. Võrdle nende kolmnurkade ümbermõõtusid ning tõesta, et need kolmnurgad on kongruentsed, kui antud punktid on

1) $A(-3; 1)$, $B(2; 1)$ ja $C(0 -5)$;
2) $A(4; 4)$, $B(1; 1)$ ja $C(3; -3)$;
3) $A(2; 0)$, $B(0; -3)$ ja $C(-4; 1)$;
4) $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$ ja $C(2; 2)$.

B.

199. Arvuta punktide $A(2;\ 6)$, $B(-3;\ 1)$, $C(-4;\ -5)$ ja $D(3;\ -7)$ kaugus sirgest $y=x$ (juhis: leia antud punktiga sümmeetriline punkt sirge $y=x$ suhtes).

200. Arvuta trapetsi pindala ja ümbermõõt, kui tema tippudeks on $A(3;\ 5)$, selle punkti peegeldus A' sirgest $y=x$ ning punktide A ja A' peegeldused x-teljest.

201. Arvuta trapetsi pindala ja ümbermõõt, kui tema tippudeks on punkt $B(-2;\ -4)$, selle punkti peegeldus B' sirgest $y=x$ ning punktide B ja B' peegeldused y-teljest.

202. Leia nelinurga $ACBC'$ pindala, kui tema tippudeks on
1) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$, $C(2;\ 3)$ ja punkti C peegeldus sirgest $y=x$;
2) $A(-2;\ -2)$, $B(5;\ 5)$, $C(-3;\ 5)$ ja punkti C peegelduse sirgest $y=x$;
3) $A(-5;\ -5)$, $B(0;\ 0)$, $C(3;\ 4)$ ja punkti C peegeldus sirgest $y=x$;
4) $A(-6;\ -6)$, $B(-1;\ -1)$, $C(-3;\ 5)$ ja punkti C peegeldus sirgest $y=x$.

3. PÖÖRDFUNKTSIOONI GRAAFIK

t

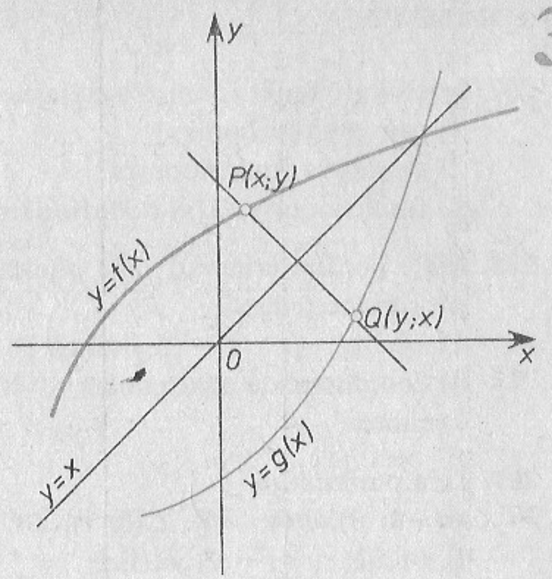
***Teoreem.* Funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes.**

* Tõestus. Eeldame, et funktsioonil $y=f(x)$ määramispiirkonnaga X ja muutumispiirkonnaga Y on olemas pöördfunktsioon $y=g(x)$.

Viimase määramispiirkonnaks on siis Y ja muutumispiirkonnaks X, kusjuures hulgad X ja Y on üksüheses vastavuses. Väidame, et $y=f(x)$ graafik on sümmeetriline funktsiooni $y=g(x)$ graafikuga sirge $y=x$ suhtes.

Eelduse põhjal on funktsioon $y=g(x)$ saadud funktsioonist $y=f(x)$ sel teel, et esmalt on avaldatud viimastest võrdustest $x=g(y)$ ja siis vahetatud tähised.

Rahuldagu mingi väärtuspaar $(x;\ y)$ võrdust $y=f(x)$. See väärtuspaar rahuldab siis ka võrdust $x=g(y)$. Muutujate vahetamise tõttu rahuldab võrdust $y=g(x)$ väärtuspaar $(y;\ x)$. Seega, kui funktsiooni $y=f(x)$ graafikul võtta mingi punkt $P(x;\ y)$, siis pöördfunktsiooni $y=g(x)$ graafikul leidub punkt $Q(y;\ x)$ (joon. 3.57). Need punktid on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes. Et hulgad X ja Y on üksüheses vastavuses, siis leidub ka funktsiooni $y=g(x)$ graafiku iga punkti jaoks sümmeetriline punkt sirge $y=x$ suhtes funktsiooni $y=f(x)$ graafikul. ▮ *



Joonis 3.57

A.

ü

203. Joonesta järgmise funktsiooni ja ka tema pöördfunktsiooni graafik:
1) $y=2x+4$; 2) $y=-x+5$; 3) $y=-3x-6$;
4) $y=\frac{1}{2}x-1{,}5$; 5) $y=-\frac{3}{6}x+7{,}5$; 6) $y=3{,}5x$.

204. Joonesta funktsiooni graafikule sümmeetriline graafik sirge $y=x$ suhtes ja selgita pöördfunktsiooni olemasolu, kui funktsioon on
1) $y=x^2-2x$; 2) $y=x^2+2x-3$; 3) $y=2x^2-x-4$;
4) $y=x^2+x$; 5) $y=x^2-x-3$; 6) $y=2x^2+3x-6$.

B.

205. Leia funktsiooni $y=\frac{1}{x}$ graafiku peegeldus koordinaattelgedest, koordinaatide alguspunktist ja sirgest $y=x$.

206. Leia joone peegeldus koordinaattelgedest, koordinaatide alguspunktist ja sirgest $y=x$, kui joone võrrand on
1) $x=2$; 2) $y=3$; 3) $x=0$; 4) $y=-5$.

3 KORDAMINE

207. Missugust funktsiooni nimetatakse
1) paarisfunktsiooniks?
2) paarituks funktsiooniks?
3) funktsiooni $y=f(x)$ pöördfunktsiooniks?

208. Mille poolest erinevad kahe punkti koordinaadid, kui need punktid on sümmeetrilised
1) x-telje; 2) y-telje; 3) sirge $y=x$;
4) koordinaatide alguspunkti; 5) sirge $y=-x$
suhtes.

209. Leia punktidega
$A(-2;\ 3)$, $B(4;\ -5)$, $C(6;\ 7)$, $D(-8;\ -9)$ sümmeetrilised punktid
1) x-telje; 2) y-telje; 3) sirge $y=x$;
4) koordinaatide alguspunkti; 5) sirge $y=-x$
suhtes?

210. Leia pöördfunktsioon, kui antud funktsioon on
1) $y=-\frac{1}{2}x+5$, kus $x\in\mathbf{R}$;
2) $3x-4y+2=0$, kus $x\in\mathbf{R}$;
3) $y=x^2-5$, kus $x\in\mathbf{R}^+$;
4) $y=-3x^2+2$, kus $x\in\mathbf{R}^-$;
5) $y=x^3$, kus $x\in\mathbf{R}$;
6) $y=x^4$, kus $x\in\mathbf{R}^-$.

211. Leia järgmise funktsiooni määramispiirkond:
1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$;
3) $y=\frac{x+2}{3x-4}$; 4) $y=\frac{3x-4}{x^2-4x+3}$.

212. Missugust hulkade X ja Y elementide vahelist vastavust nimetatakse funktsiooniks?

4. JADAD

4.1. JADA MÕISTE

Hulga elementide järjestamisel varustatakse nad sageli järjekorranumbritega. Nii toimitakse näiteks mingi spordiala edetabeli koostamisel, ülesannete lülitamisel õpikusse jne. Sellist järjekorranumbritega varustatud elementide lõpmatut loendit nimetatakse üldiselt **jadaks**, kui aga tahetakse rõhutada, et elemendid on arvud, siis **arvjadaks**.

Arvjadade korral me eeldame, et õnnestub määrata eeskiri, mis võimaldab järjekorranumbri järgi arvutada vastavat elementi. See tähendab, et peab leiduma järjekorranumbrite hulgal määratud funktsioon, mille väärtuseks on need elemendid.

Olgu argumendi väärtusteks järjekorranumbrid

1, 2, 3, 4, . . ., n, . . .,

s. t. järjestikused positiivsed täisarvud alates 1-st. Esitame neile vastavad funktsioonide väärtused, kui jada määravateks funktsioonideks on

$y=x^2$, $y=2x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3x}{x+1}$ ja üldiselt $y=f(x)$.

Nii saame arvjadad

1,4, 9, 16, . . ., n^2, . . .

2, 4, 6, 8, . . ., $2n$, . . .

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$

$\frac{3}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{12}{5},\ \ldots,\ \frac{3n}{n+1},\ \ldots$

ja üldiselt

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$

Väärtusi $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ jne. nimetatakse **jada liikmeteks.** Jada liikmeid tähistatakse ka väikeste tähtedega, millede juurde märgitakse indeksina järjekorranumber, s. t. arv, mis näitab, mitmenda liikmega selles jadas on tegemist. Näiteks

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$

kus $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$ jne.

Jada n-ndat liiget a_n nimetatakse **jada üldliikmeks** ning võrdust

$\boxed{a_n = f(n)}$.

jada üldliikme valemiks.

Jada on antud, kui on teada tema üldliikme valem või kui on määratud eeskiri jada liikmete leidmiseks. Näiteks võib niisuguseks eeskirjaks olla: «jada liikmeteks on arvu π lähisväärtused ühe, kahe, kolme jne. kohaga peale koma». Sel juhul on jadaks

3,1, 3,14, 3,142, 3,1416, 3,14159, . . .

Kui jada on antud oma üldliikme valemiga, siis saab arvutada selle jada ükskõik mitmendat liiget. Näiteks, kui tahame teada jada

2, 4, 8, . . ., $2n$, . . .

89. ja 5001. liiget, siis arvutame need valemist $a_n = 2n$:

$a_{89} = 178$ ja $a_{5001} = 10\,002$.

A.

213. Leia antud jada 15., 25. ja 35. liige:
1) 2, 5, 8, 11, . . ., $3n-1$, . . .;
2) 8, 13, 18, 23, . . ., $5n+3$, . . .;
3) $-299, -148, -97, -71, \ldots, \frac{n^2-300}{n}, \ldots$;
4) $2, \frac{10}{3}, 5, \frac{34}{5}, \ldots, \frac{2(n^2+1)}{n+1}, \ldots$

214. Leia jada 1., 10., 100. ja 1000. liige, kui

$a_n = \frac{n^2}{n+100}$.

215. Leia jada 90., 95. ja 100. liige, kui

$a_n = \frac{n+1}{2n-1}$.

216. Mitmes liige on arv $\frac{51}{97}$, $\frac{33}{61}$, $\frac{19}{33}$ jadas, mille üldliige on $a_n = \frac{2n+3}{4n+1}$?

217. Mitmes liige on arv $-\frac{17}{30}$, $-\frac{33}{86}$, $-\frac{41}{126}$ jadas, mille üldliige on $a_n = \frac{3-4n}{n^2+5}$?

218. Esita jada esimesed liikmed ja üldliige, kui jada liikmeteks on
1) paaritud arvud alates arvust 1;
2) paaritud arvust alates arvust 5;
3) 7-ga jaguvad naturaalarvud alates arvust 7;
4) 7-ga jaguvad naturaalarvud alates arvust 35.

B.

219. Esita jada esimesed liikmed ja üldliige, kui jada liikmeteks on
1) naturaalarvud, mis 3-ga jagamisel annavad jäägi 1;
2) naturaalarvud, mis 5-ga jagamisel annavad jäägi 3;
3) naturaalarvud, mis 7-ga jagamisel annavad jäägi 5;
4) naturaalarvud, mis 9-ga jagamisel annavad jäägi 7.

220. Kirjuta jada esimesed neli liiget, kui jada üldliige avaldub kujul

1) $\frac{2n-1}{3n+2}$; 2) $\frac{3-n}{2n-1}$; 3) $\frac{n^2-4}{4n}$;
4) 2^n+1; 5) 2^{n+1}; 6) -2^{n-1};
7) $(-1)^n \cdot n$; 8) $(-1)^{n+1} \cdot n$; 9) n^n.

221. Esita jada esimesed liikmed, kui jada liikmeteks on
1) arvu $\sqrt{2}$ lähisväärtused puuduga;
2) arvu π lähisväärtused liiaga;
3) arvu $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ lähisväärtused liiaga;
4) arvu $\pi-\sqrt{2}$ lähisväärtused puuduga.

4.2. ARITMEETILINE JADA

Tutvume lähemalt lineaarfunktsiooni väärtuste jadaga, s. o. jadaga, mille üldliikme valemiks on

$a_n = an + b$.

Olgu näiteks antud lineaarfunktsioonid

$y = 2x + 3$, $y = -3x + 1$ ja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Siis neile funktsioonidele vastavad jadad on

1) $5, 7, 9, 11, \ldots, 2n+3, \ldots$

2) $-2, -5, -8, -11, \ldots, -3n+1, \ldots$

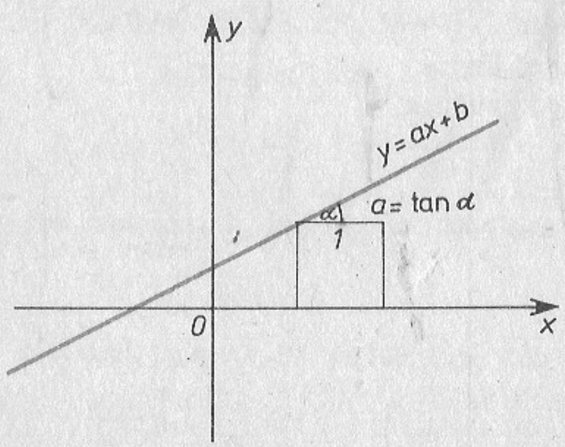
3) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \ldots, -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}, \ldots$

Lineaarfunktsiooni väärtuste jadasid nimetatakse **aritmeetilisteks jadadeks.** Paneme tähele, et aritmeetilises jadas on iga kahe järjestikuse liikme vahe konstant, mis võrdub x-i kordajaga vastava lineaarfunktsiooni avaldises. Nii on toodud näidetes

1) $7-5=9-7=11-9=\ldots=2n+3-(2(n-1)+3)=2$,

2) $-5-(-2)=-8-(-5)=-11-(-8)=\ldots=$
$=-3n+1-(-3(n-1)+1)=-3$,

3) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\ldots=$
$=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}(n-)+\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.



Joonis 4.1

See tähelepanek on kooskõlas lineaarfunktsiooni järgmise omadusega. **Kui argument muutub ühiku võrra, siis lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ väärtus muutub a võrra** (joon. 4.1). Tõepoolest,

$ax + b - (a(x-1)+b) = ax + b - ax + a - b = a$.

Aritmeetilisele jadale iseloomuliku kahe järjestikuse liikme konstantset vahet nimetatakse lühidalt **aritmeetilise jada vaheks**. On kokku lepitud tähistada seda vahet tähega d. Seega, kui aritmeetiline jada on lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ väärtuste jada, siis

$\boxed{d = a}$.

Toodud näidetes: 1) $d = 2$, 2) $d = -3$ ja 3) $d = -\frac{1}{2}$.

Lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ nimetasime kasvavaks, kui $a > 0$, ja kahanevaks, kui $a < 0$. Vastavalt sellele nimetatakse ka aritmeetilist jada $d = a > 0$ korral **kasvavaks** ja $d = a < 0$ korral kahanevaks.

Vahe kaudu defineeritakse aritmeetiline jada järgmiselt.

Jada, milles teisest liikmest alates iga liikme ja temale eelneva liikme vahe on jääv, nimetatakse aritmeetiliseks jadaks.

Seame nüüd ülesandeks antud aritmeetilise jada järgi leida teda määrav lineaarfunktsioon.

Näide. Olgu antud jada

$-5, -1, 3, 7, \ldots$

Sellele jadale vastava lineaarfunktsiooni leidmiseks tuleb leida kordajad a ja b avaldises $ax + b$. Et $a = d$ ja antud jada korral $d = 4$, siis $a = 4$. Arvu b leiame võrdusest $y = 4x + b$, kui x ja y asemele paneme mõne jadaga määratud väärtuspaari, s. t. kas $(1, -5)$, $(2, -1)$, $(3, 3)$ või $(4, 7)$. Võttes neist väärtuspaaridest näiteks esimese, saame b leidmiseks võrrandi

$-5 = 4 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -9$.

Veendu, et teiste väärtuspaaride kasutamisel saame b väärtuseks ikka -9.

Seega otsitav funktsioon on $y = 4x - 9$ ja antud jada üldliikme valemi võib esitada kujul $a_n = 4n - 9$.

4 1. ARITMEETILISE JADA ÜLDLIIKME VALEM

Seame ülesandeks avaldada aritmeetilise jada üldliige esimese liikme ja vahe kaudu. Viimase näite puhul lahendame selle ülesande järgmiselt:

$$a_n = 4n - 9 = -5 + 4n - 4 = -5 + 4(n-1)$$

ehk vahepealseid võrdusi ära jättes

$$a_n = -5 + 4(n-1).$$

Selle tulemuse põhjal võib sõnastada teoreemi.

Teoreem. **Aritmeetilise jada**
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
üldliige avaldub kujul

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Tõestus. Kui üldliikme valemis
$a_n = dn + b$
võtta $n = 1$, siis $a_1 = d + b$ ehk $b = a_1 - d$. Seega

$$a_n = dn + a_1 - d = a_1 + d(n-1). \quad \blacksquare$$

Saadud valemit nimetatakse **aritmeetilise jada üldliikme valemiks.** See valem seob nelja arvu. Niipea, kui kolm neist on teada, saab neljanda arvutada.

Näide 1. Leiame aritmeetilise jada 41. liikme, kui $a_1 = 5$ ja $d = 2$:
$a_{41} = 5 + 2(41-1) = 85$.

Näide 2. On antud $a_{66} = -194$ ja $a_1 = 1$, leiame aritmeetilise jada vahe d:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{-194-1}{66-1} = \frac{-195}{65} = -3.$$

Näide 3. Leiame, mitmes liige aritmeetilises jadas on arv 38, kui $a_1 = 2$ ja $d = 4$:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{38-2}{4} + 1 = 10.$$

Näide 4. Leiame aritmeetilise jada 1. liikme, kui $a_{19} = 12$ ja $d = -2$:
$a_1 = a_n - d(n-1) = 12 - (-2)(19-1) = 48$.

A.

4 ü

222. Esita antud funktsioonidega määratud arvjadade esimesed neli liiget ja n-es liige ning otsusta, missugused nendest on aritmeetilised jadad:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2 - x^2$; 3) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

4) $y = 3(1+x)$; 5) $y = \frac{2}{x}$.

223. Arvuta aritmeetilise jada esimesed kümme liiget, kui üldliikme valem on

1) $a_n = -3 + 2(n-1)$; 2) $a_n = -3 + \frac{3}{4}(n-1)$;

3) $a_n = 0 - \frac{1}{2}(n-1)$; 4) $a_n = -10 + 1{,}2(n-1)$;

5) $a_n = 5 - 2{,}4(n-1)$.

Missugused nendest jadadest on kasvavad, missugused kahanevad?

224. Arvuta aritmeetilise jada esimesed viis liiget, kui

1) $a_1 = 4$ ja $d = 3$; 2) $a_2 = -4$ ja $d = 2$;
3) $a_5 = -16$ ja $d = -3$; 4) $a_4 = 13$ ja $a_5 = 13{,}4$;
5) $a_2 = 5\frac{3}{4}$ ja $a_4 = 7\frac{1}{4}$.

B.

225. Arvuta järgmises tabelis puuduvad arvud:

a_1	d	n	a_n
15	−3	10	
−21	4	25	
−9		11	21
−8		15	−29
23	−5		−22
−16	3		20

Missugused nendest jadadest on kasvavad, missugused kahanevad?

226. Arvuta aritmeetilise jada

1) 8. liige, kui $a_3 = 8{,}4$ ja $d = 1{,}6$;
2) 23. liige, kui $a_{15} = 72{,}5$ ja $d = -0{,}5$;

3) 17. liige, kui $a_9 = -17$ ja $d = 2{,}2$;
4) 36. liige, kui $a_{24} = 18{,}36$ ja $d = -1{,}56$.

227.

Aritmeetilises jadas on antud	Leia
1) $a_6 = 23$ ja $a_{11} = 43$	a_1 ja d
2) $a_8 = 19{,}4$ ja $a_{15} = 24{,}3$	a_1 ja d
3) $a_7 = 19$ ja $a_{19} = 55$	n, kui $a_n = 28$

228. Vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m. Kui palju langeb keha 16. sekundil, kui langemistee pikkus kasvab igas sekundis 9,8 meetri võrra? Mitmendal sekundil langeb keha 249,9 m?

229. Matkaja, kes käib iga päev 1,5 km võrra lühema tee kui eelmisel päeval, matkab kolmandal päeval 16 km. Mitu kilomeetrit käib matkaja esimesel päeval?

230. Jalgrattur sõidab esimesel tunnil 20 km, igal järgneval tunnil aga 0,8 km vähem kui eelmisel. Mitu tundi sõidab jalgrattur, kui ta viimasel tunnil sõidab 16 km?

231. Paiguta arvude 12 ja 24 vahele 19 arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise jada. Leia selle jada vahe.

232. Paiguta arvude 7 ja 35 vahele 6 arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise jada.

233. Paiguta arvude a ja $b > a$ vahele m arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise jada. Leia selle jada esimesed kolm liiget.

2. ARITMEETILISE JADA ESIMESE n LIIKME SUMMA

Üldise definitsiooni kohaselt pole jada liikmete arv piiratud. Mõnikord on aga jadast tarvis vaadelda vaid tema esimest n liiget

$a_1, a_2, \ldots, a_n$,

mida nimetatakse ka **jada lõikeks.**

Näiteks sageli osutub vajalikuks leida aritmeetilise jada esimese n liikme ehk jada lõike summa

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Kui liikmete arv on väike, siis pole selle summa leidmine raske. Näiteks jada lõike

$-3, -1, 1, 3, 5$

liikmete summaks saame

$-3+(-1)+1+3+5=5$.

Kui aga liikmete arv lõikes on suur, siis osutub summa arvutamine küllaltki aeganõudvaks.

Alustame nimetatud summa leidmise ülesande lahendamist aritmeetilise jada omadustega tutvumisest.

***Teoreem.* Aritmeetilises jadas on iga liige alates teisest võrdne oma naaberliikmete aritmeetilise keskmisega,** s. t. $k \geqslant 2$ korral

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Tõestus. Et $a_{k-1} = a_k - d$ ja $a_{k+1} = a_k + d$, siis

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a_k - d + a_k + d}{2} = \frac{2a_k}{2} = a_k. \blacksquare$$

Näiteks, kui on antud aritmeetiline jada
$-3, -1, 1, 3, 5, \ldots$, siis
$\frac{-3+1}{2} = -1$; $\frac{-1+3}{2} = 1$; $\frac{1+5}{2} = 3$.

Enne järgmise omadusega tutvumist vaatleme veel üht näidet. Olgu antud aritmeetilise jada lõige, mis sisaldab esimesed kaheksa liiget:

$-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15$.

Paneme tähele järgmist omadust:

$a_1 + a_8 = -6 + 15 = 9$,
$a_2 + a_7 = -3 + 12 = 9$,
$a_3 + a_6 = 0 + 9 = 9$,
$a_4 + a_5 = 3 + 6 = 9$.

Seega antud juhul

$a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$.

Antud jada lõike puhul ilmsiks tulnud seaduspärasus on omane kõigi aritmeetiliste jadade kõigile lõigetele. Sõnastame selle omaduse.

Teoreem. Aritmeetilise jada lõike algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete summa on jääv ning võrdub lõike esimese ja viimase liikme summaga.

*Tõestus. Aritmeetilise jada lõike

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

teise liikme saame, kui esimese liikmega liidame jada vahe, ning eelviimase liikme saame, kui viimasest liikmest lahutame jada vahe, s. t. $a_2 = a_1 + d$ ja $a_{n-1} = a_n - d$. Seega nende summa

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

ongi võrdne lõike esimese ja viimase liikme summaga.

Selgitame selle omaduse kehtivust lõike algusest ja lõpust k-ndate liikmete korral. Lõike lõpust teise liikme indeks on $n-1$, lõpust kolmanda liikme indeks $n-2$ jne., lõpust k-nda liikme indeks on $n-k+1$. Üldliikme valemi järgi

$$a_k = a_1 + (k-1)d,$$

$$a_{n-k+1} = a_1 + (n-k+1-1)d = a_1 + (n-k)d$$

ja seega

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = \\ &= a_1 + kd - d + a_1 + nd - kd = a_1 + a_1 + (n-1)d = \\ &= a_1 + a_n. \blacksquare \end{aligned}$$

*

Tõestatud omadust selgitab ka joonis 4.2. Aritmeetilise jada iga liige esitub tulbana, mille laius on 1 ja kõrguse mõõtarv võrdub jada vastava liikmega. Kogu jada esitub siis trepina. Kaks sellist astmetega teineteise vastu asetatud treppi näitavadki, et

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

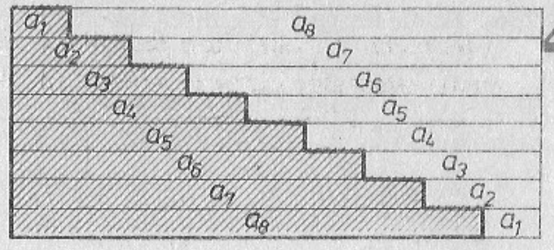
Seda omadust kasutades saamegi tõestada valemi aritmeetilise jada lõike summa arvutamiseks.

Teoreem. Aritmeetilise jada esimese n liikme summa S_n on võrdne vastava lõike äärmiste liikmete aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n .$$

Tõestus. Meie tähistuse kohaselt

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$



Joonis 4.2

Esitame selle summa kaks korda: üks kord on liidetavateks jada liikmed antud järjestuses, teine kord vastupidises järjestuses:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Kohakuti asetsevate liikmete summa on teatavasti võrdne lõike esimese ja viimase liikme summaga. Seega neid võrdusi liites saame

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ja siit

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \blacksquare$$

Teades, et $a_n = a_1 + (n-1)d$, võime aritmeetilise jada esimese n liikme summa valemi esitada ka kujul

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n .$$

A.

234. Arvuta aritmeetilise jada n-es liige, kui

1) $a_1 = 3$, $d = -2$ ja $n = 16$;
2) $a_1 = -\frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{3}$ ja $n = 13$;
3) $a_1 = 2{,}5$, $d = -1{,}2$ ja $n = 26$.

235. Arvuta aritmeetilise jada lõike summa, kui

1) $a_1 = 6$, $a_n = 76$ ja $n = 15$;
2) $a_1 = 10$, $a_n = -19$ ja $n = 30$;
3) $a_1 = 3{,}4$, $d = 2{,}1$ ja $n = 14$;
4) $a_1 = \frac{5}{6}$, $d = \frac{4}{3}$ ja $n = 12$.

236. Täida lüngad järgmises tabelis:

a_1	d	n	a_n	S_n
$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{8}$	
-10		6	-20	
	$-\frac{1}{4}$	13	1	
	2	15	-10	
14,5	0,7		32	
$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$	
-10	-2	6		
5,2	0,4	43		108
		10	-37	-55

237. Mitu silma on kokku ühel täringul?

238. Mitu korda lööb ööpäeva jooksul kell, mis lööb ainult täistunde, alates 1-st kuni 12-ni?

239. Leia esimese 100 positiivse täisarvu summa.

240. Leia esimese 100 paarisarvu summa, alates arvust 2.

241. Leia esimese 100 paaritu arvu summa, alates arvust 1.

242. Vabalt langev keha läbib esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas 9,8 m rohkem kui eelnevas. Leia 1) kui pika tee läbib see keha 21 sekundiga; 2) mitu sekundit langeb keha 500 m kõrguselt.

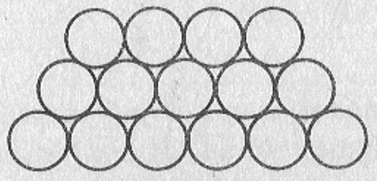
243. Kahe linna vahelise gaasijuhtme ehitamiseks valmistatud 25 m pikkused torud olid laotud tehase õuele kaheksasse täpselt ühesuurusesse kuuerealisse virna, nii nagu skemaatiliselt on näidatud joonisel 4.3. Alumises reas oli 20 toru. Leia 1) mitu toru oli igas virnas; 2) kui pikk oli ehitatav gaasijuhe.

244. Jalgratturite matkagrupp otsustas pärast ühtlast kahetunnilist sõitu, kui oli läbitud 24 km, tõsta igas järgnevas tunnis keskmist kiirust 2 km võrra. Mis kellaajal jõudis matkagrupp sihtkohta, kui väljuti kell 7 hommikul ja kogu tee pikkus oli 114 km?

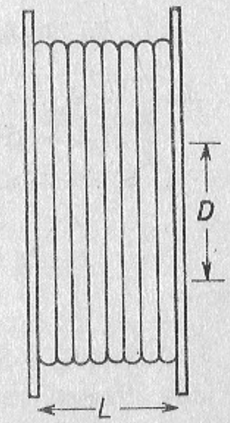
245. Maja katus koosneb kahest võrdsest trapetsikujulisest ja kahest võrdsest kolmnurgakujulisest osast. Trapetsikujulise osa räästapoolsele küljele pandi 240 kivi ja igasse järgmisse ritta kaks kivi vähem kui eelmisse. Kolmnurgakujulise osa harjapoolsele viimasele reale pandi üks kivi ja igas eelmises reas oli kaks kivi rohkem. Teades, et kivide ridade arv nii trapetsikujulistel kui ka kolmnurgakujulistel osadel oli 30, leia, mitu kivi kulus katuse katmiseks. Mitu kivi telliti, kui on teada, et transpordil purunenud ja defektidega kive oli 3,7 % kogu tellimusest ning katus sai täielikult kaetud ja kive üle ei jäänud?

246. Rullile, mille mõõtmed on D ja L (joon. 4.4), on mähitud telefonikaabel, mille läbimõõt on d cm. Kui palju kaablit mahub 1, 2, 3, . . ., n kihile, kui iga järgnev kiht on keritud eelmisele täpselt peale, mitte vahekohtadesse? Kui pikk on rullile mähitud kaabel, kui $D=0{,}9$ m, $L=0{,}8$ m, d=4 cm ja kihte on 25?

Joonis 4.3



Joonis 4.4



247. Kolhoosi üldkoosolek võttis 1981. a. algul kohustuse tõsta 20 aasta jooksul piimatoodang kolmekordseks, kusjuures piimatoodangu juurdekasv iga aasta kohta kavandati ühtlane. Kui palju kohustus kolhoos piima tootma 1985. a., 1992. a. ja 2000. a., kui 1981. a. piimatoodang oli 760 tonni?

248. Mitu korda lööb ööpäeva jooksul Tartu raekoja kell, mis iga täistunni ajal lööb vastavalt 1 kuni 12 korda ja lisaks sellele iga veerandtunni ajal 1 kord, pooltunni ajal 2 korda, kolmveerandtunni ajal 3 korda ja täistunni ajal 4 korda?

4.3. TÕKESTAMATULT KASVAV JADA

Vaatleme näiteks jadasid

1) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$

2) $-2, -\frac{11}{2}, -\frac{26}{3}, \ldots, \frac{1-3n^2}{n}, \ldots$

3) $-1, 4, -9, 16, \ldots, (-1)^n \cdot n^2, \ldots$

4) $-8, -5, 0, 7, 16, \ldots, n^2-9, \ldots$

Neist 1. jada sisaldab ainult positiivseid liikmeid, 2. jada sisaldab ainult negatiivseid liikmeid, 3. ja 4. jada sisaldavad nii positiivseid kui ka negatiivseid liikmeid, kusjuures 4. jada liikmete hulgas leidub ka arv 0.

Moodustame nüüd jadad, mille liikmeteks on antud jadade liikmete absoluutväärtused:

5) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$

6) $2, \frac{11}{2}, \frac{26}{3}, \ldots, \frac{3n^2-1}{n}, \ldots$

7) $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

8) $8, 5, 0, 7, 16, \ldots, |n^2-9|, \ldots$

Selgita järgmiste võrduste kehtivust iga $n \in \mathbb{Z}^+$ korral:

$|2n-1| = 2n-1$,

$\left|\frac{1-3n^2}{n}\right| = \frac{3n^2-1}{n}$,

$|(-1)^n \cdot n^2| = n^2$.

Miks ei või kirjutada $|n^2-9| = 9-n^2$?

Jadasid 5.—8. iseloomustab omadus, et neis järjest kaugemale minnes jada liikmed suurenevad (jada alguses võivad liikmed väheneda (vt. 8. jada)), kusjuures selles protsessis jada liikmed saavad ja jäävad suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust. Näiteks olgu etteantud arvuks 1000. Sellest arvust saavad ja jäävad 5. jada liikmed suuremaks alates 501. liikmest, 6. jada liikmed alatesd 334. liikmest, 7. ja 8. jada liikmed alates 32. liikmest.

Mitmendast liikmest alates saavad ja jäävad nende jadade liikmed suuremaks kui 10 000?

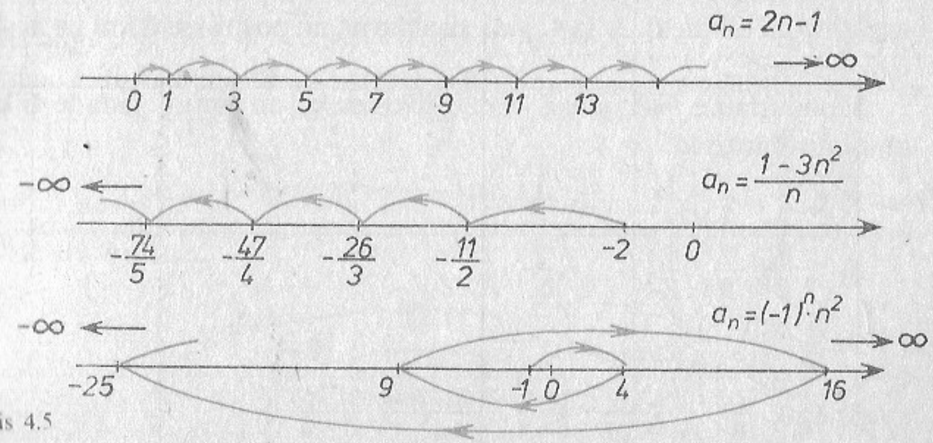
Jada nimetatakse tõkestamatult kasvavaks, kui tema liikmete absoluutväärtustest moodustatud jadas järjest kaugemale minnes jada liikmed suurenevad ning saavad ja jäävad suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust.

Meie näites 1. ja 4. jada kasvavad tõkestamatult positiivses suunas, 2. jada negatiivses suunas ning 3. jada pendeldades positiivselt suunalt negatiivsele ja tagasi. Jadade 1.—3. kasvamist on skemaatiliselt illustreeritud joonisel 4.5.

Asjaolu, et tegemist on tõkestamatult kasvava jadaga, märgitakse jada üldliikme ja nn. lõpmatuse sümboli «∞» abil järgmiselt:
kui $n \to \infty$, siis kas $a_n \to \infty$ või $a_n \to -\infty$ või $a_n \to \pm\infty$.

Näiteks, kui $n \to \infty$, siis $n^2 \to \infty$, $-n^2 \to -\infty$ ja $(-1)^n n^2 \to \pm\infty$, mida loeme: kui n kasvab tõkestamatult, siis jada, mille üldliikmeks on n^2, kasvab tõkestamatult positiivses suunas; jada, mille üldliikmeks on $-n^2$, kasvab tõkestamatult negatiivses suunas ja jada, mille üldliikmeks on $(-1)^n n^2$, kasvab tõkestamatult pendeldades positiivselt väärtuselt negatiivsele.

Keskkoolis me ei tõesta, kuid võtame teadmiseks, et **jada on tõkestamatult kasvav alati, kui üldliige avaldub murruna, mille lugejas naturaalarvu**



Joonis 4.5

4 ***n* astendaja on suurem kui nimetajas või kui nimetaja on konstant.** Näiteks, kui jada üldliige on

$$\frac{n^2+1}{n},\ \frac{n^3}{1+n},\ \frac{n^3-5}{n^2+1},\ \frac{n^2-2}{21},\ \frac{\sqrt{n}}{3}\ \text{või}\ \frac{\sqrt{n+1}}{5},$$

siis jada osutub tõkestamatult kasvavaks.

A.

ü **249.** Esita viimases näites toodud üldliikmete järgi jada esimesed viis liiget.

B.

250. Tee kindlaks, mitmendast liikmest alates nendes jadades liikmed saavad ja jäävad suuremaks kui 100, suuremaks kui 1000.

4.4. HÄÄBUV JADA

Võtame nüüd vaatluse alla jadad

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

2) $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{8}, \ldots, -\frac{2}{n^2}, \ldots$

3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n}{1+n}, \ldots$

4) $1, 0, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{25}, \ldots, \frac{2-n}{n^2}, \ldots$

Neist 1. jada sisaldab ainult positiivseid liikmeid, 2. jada sisaldab ainult negatiivseid liikmeid, 3. ja 4. jada sisaldavad nii positiivseid kui ka negatiivseid liikmeid.

Moodustame veel jadad, mille liikmeteks on antud jadade liikmete absoluutväärtused:

5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

6) $2, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{2}{n^2}, \ldots$

7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{1+n}, \ldots$

8) $1, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, \frac{3}{25}, \ldots, \frac{|2-n|}{n^2}, \ldots$

Selgita järgmiste võrduste kehtivust iga $n \in \mathbb{Z}^+$ korral:

4

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

$$\left|-\frac{2}{n^2}\right| = \frac{2}{n^2},$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{1+n}\right| = \frac{1}{1+n},$$

$$\left|\frac{2-n}{n^2}\right| = \frac{|2-n|}{n^2}.$$

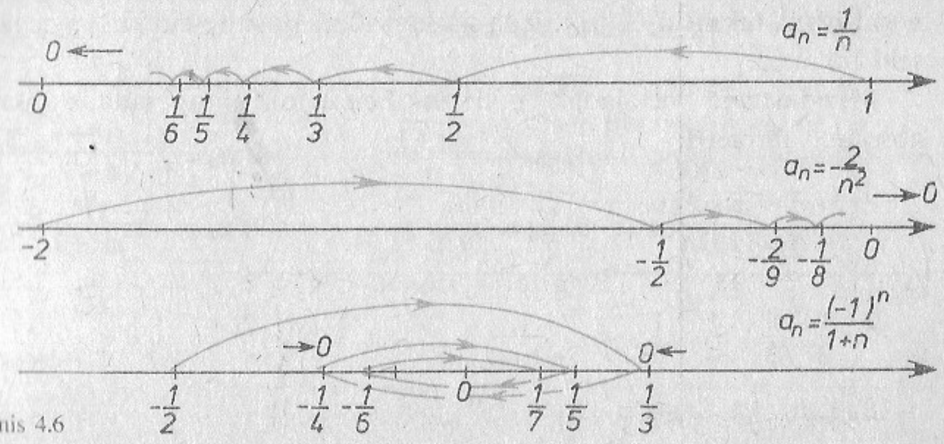
Jadasid 5.—8. iseloomustab omadus, et neis järjest kaugemale minnes jada liikmed vähenevad (esimeste liikmete juures võib esineda liikmete suurenemist (vt. 8. jada)), kusjuures selles protsessis jada liikmed saavad ja jäävad väiksemaks igast kui tahes väikesest etteantud positiivsest arvust. Näiteks olgu etteantud arvuks 0,001. Sellest arvust saavad ja jäävad 5. jada liikmed väiksemaks alates 1001. liikmest, 6. jada liikmed alates 142., 7. jada liikmed alates 1000. ja 8. jada liikmed alates 998. liikmest.

Mitmendast liikmest alates saavad ja jäävad nende jadade liikmed väiksemaks kui 0,01?

Jada nimetatakse hääbuvaks ehk nullile lähenevaks, kui tema liikmete absoluutväärtustest moodustatud jadas järjest kaugemale minnes jada liikmed vähenevad ning saavad ja jäävad väiksemaks igast kui tahes väikesest etteantud positiivsest arvust.

m

Meie näites 1. jada läheneb nullile paremalt, 2. ja 4. jada vasakult ning 3. jada pendeldades positiivselt suunalt negatiivsele ja tagasi. Jadade 1.—3. kahanemist on skemaatiliselt illustreeritud joonisel 4.6.



Joonis 4.6

4 Märgime, et hääbuvaks osutub ka jada 0, 0, 0, . . ., sest siin on jada kõik liikmed väiksemad igast kui tahes väikesest etteantud positiivsest arvust.

Asjaolu, et tegemist on hääbuva jadaga, märgitakse jada üldliikme abil järgmiselt:

kui $n\to\infty$, siis $a_n\to 0$,

mida loeme: kui n kasvab tõkestamatult, siis jada üldliikmega a_n on hääbuv.

Näiteks kui $n\to\infty$, siis $\frac{1}{n^2}\to 0$ ja $\frac{-1}{n^3+1}\to 0$.

m Võtame ilma tõestamata teatavaks, et **jada on hääbuv, kui tema üldliige avaldub murruna, mille nimetajas naturaalarvu n astendaja on suurem kui lugejas või kui lugejaks on konstant.** Hääbuvad jadad on näiteks

$$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{10},\ \frac{8}{17},\ \frac{10}{26},\ \ldots,\ \frac{2n}{n^2+1},\ \ldots$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{4}{11},\ \frac{9}{30},\ \frac{16}{67},\ \ldots,\ \frac{n^2}{n^3+3},\ \ldots$$

A.

ü **251.** Arvuta jada neli esimest liiget ning selgita, mitmendast liikmest alates jada liikmed saavad ja jäävad väiksemaks arvust 0,01, kui jada üldliige on

1) $a_n=\frac{3}{2n+1}$; 2) $a_n=\frac{5}{n^2+5}$; 3) $a_n=\frac{3}{n^3+3}$;

4) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$; 5) $a_n=\frac{n}{n^3+1}$; 6) $a_n=\frac{n}{2^n}$.

252. Tee jada üldliikme järgi kindlaks, kas jada on tõkestamatult kasvav, hääbuv või neist mitte kumbki:

1) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $a_n=\frac{3n-1}{n}$; 3) $a_n=\frac{n^2+5}{n^3}$;

4) $a_n=\frac{n+1}{n+100}$; 5) $a_n=\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n}$; 6) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n+1}$;

7) $a_n=\frac{3n^2-5}{1303n}$; 8) $a_n=\frac{\sqrt{n}}{1986}$; 9) $a_n=\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}$.

4.5. JADA PIIRVÄÄRTUSE MÕISTE

Arvu A nimetatakse jada

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

piirväärtuseks, kui selle jada liikmete ja arvu A vahede absoluutväärtustest moodustatud jada

$|a_1-A|, |a_2-A|, |a_3-A|, \ldots, |a_n-A|, \ldots$

osutub hääbuvaks jadaks.

Joonisel 4.7 on kujutatud arvtelg ja sellel arvule A vastav punkt. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile peavad jada liikmetele vastavad punktid seda enam lähenema arvule A vastavale punktile, mida kaugemale me jadas läheme.

Punktide lähenemine piirväärtusele vastavale punktile võib toimuda ühelt poolt (juhud *a*) ja *b*)) või pendeldades (juht *c*)).

Näide 1. Jälgides liikmete muutumist arvjadas

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{99}{100},\ \frac{100}{101},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots$$

märkame, et mida kaugemale me jadas läheme, seda enam lähenevad jada liikmed arvule 1. Selgitame, kas arv 1 on selle jada piirväärtus.

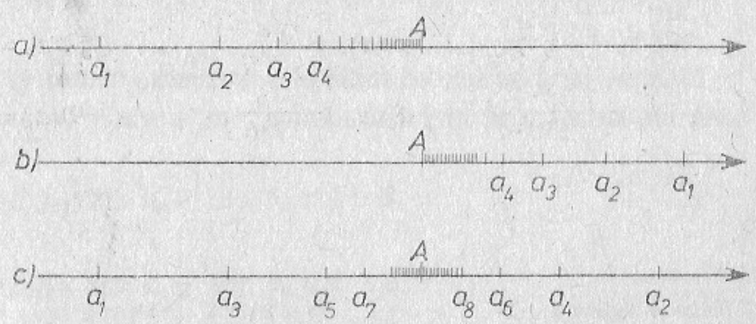
Moodustame vastava absoluutväärtuste jada

$$\left|\frac{1}{2}-1\right|,\ \left|\frac{1}{3}-1\right|,\ \left|\frac{3}{4}-1\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{99}{100}-1\right|,$$

$$\left|\frac{100}{101}-1\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{n-1}{n}-1\right|,\ \ldots$$

ja kontrollime, kas see jada on hääbuv, s. t. kas $n\to\infty$ korral

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|\to 0.$$



Joonis 4.7

Et

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

ja jada üldliikmega $\frac{1}{n}$ on hääbuv jada, siis arv 1 osutub tõepoolest vaadeldava jada piirväärtuseks.

Asjaolu, et arv A on jada

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

piirväärtus, kirjutatakse lühemalt üles sümboli lim[1] abil kujul

V $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A}$.

Toodud näite puhul seega

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1.$$

Näide 2. Jälgides liikmete muutumist jadas

$$1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{100}{51}, \frac{102}{52}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$$

paneme tähele, et mida kaugemale jadas läheme, seda enam lähenevad jada liikmed arvule 2.

Arv 2 on selle jada piirväärtuseks siis, kui jada

$$|1-2|, \left|\frac{4}{3}-2\right|, \left|\frac{6}{4}-2\right|, \ldots, \left|\frac{2n}{n+1}-2\right|, \ldots$$

osutub hääbuvaks. Et aga

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right| = \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

ja

$$\frac{2}{n+1}\to 0, \text{ kui } n\to\infty,$$

siis tõepoolest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

Hääbuv jada on selline, mille piirväärtuseks osutub arv null. Seega võib hääbuva jada korral kirjutise «*kui* $n\to\infty$, *siis* $a_n\to 0$» asemel kirjutada

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

[1] *limes* — ladina k. piir

Analoogiliselt võib tõkestamatult kasvava jada korral kirjutise «kui $n\to\infty$, siis $a_n\to\infty$» asemel kirjutada

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Kui jada kõigiks liikmeteks on üks ja sama arv, siis jada nimetatakse **konstantseks** ja tema piirväärtuseks on sama arv. Näiteks jada

$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

piirväärtuseks on arv 1, mida märgime

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Samuti on üldse iga konstandi c korral

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

B.

253. Kontrolli, kas antud arv on jada piirväärtuseks, s. t. kas kehtib võrdus ü

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=5$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-5n}{n+5}=-5$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n-1}=\frac{3}{2}$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-5}=3$.

4.6. JADA PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE

* Jada piirväärtuse arvutamist lihtsustavad järgmised teoreemid. Kui

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

siis

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A+B$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A-B$,

V

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n : b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n : \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A : B$, kui $B \neq 0$.

Võrdusest $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ ja 3. teoreemist järeldub, et

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=\lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Vaatleme järgnevalt mõningaid näiteid nende teoreemide kasutamise kohta piirväärtuste arvutamisel.

Näide 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} 5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=5-0=5.$

Näide 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2}=0+0=0.$

Näide 3. Piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n+2}$$

arvutamisel ei ole 4. teoreem otseselt rakendatav, sest nii jagataval kui ka jagajal piirväärtus puudub. Antud ülesanne osutub aga lahenduvaks, kui murru lugejas ja nimetajas võtame teguri n sulgude ette ja taandame:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(6+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}=\frac{3-0}{6+0}=\frac{1}{2}.$$

Näide 4. Eespool väitsime, et kui jada üldliikme lugejas n astendaja on väiksem kui nimetajas, siis see jada osutub hääbuvaks. Veendume nüüd selle väite õigsuses ühe näite puhul, tõestades, et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2}=0.$$

Ka siin pole 4. teoreem otseselt rakendatav, mistõttu peame kõigepealt teisendama jada üldliikme avaldist:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0+0=0.$$

4

Kui võtta teadmiseks reegel, et arvu jagatis lõpmatusega on null, siis võime selle piirväärtuse leidmisel kasutada ka teguri n sulgude ette toomise võtet:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{n}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=\frac{3+0}{\infty}=0. \ *$$

B.

ü

254. Leia jada piirväärtus, kui üldliige on antud kujul

1) $a_n=2+\frac{3}{n}$;
2) $a_n=\frac{2}{n}-\frac{5}{n+1}$;
3) $a_n=3\cdot\frac{1}{n+1}$;
4) $a_n=\frac{3}{5-n}$;
5) $a_n=\frac{2n}{n^2+1}$;
6) $a_n=\frac{5}{n-3}$;
7) $a_n=\frac{2n+3}{5}$;
8) $a_n=\frac{n^2-3}{3n}$;
9) $a_n=\frac{2-n^2}{2-n}$.

255. Leia jada piirväärtus, kui üldliige on antud kujul

1) $a_n=\frac{n}{n+1}$;
2) $a_n=-\frac{n+1}{n}$;
3) $a_n=\frac{n+1}{a^2}$;
4) $a_n=\frac{2n}{5n-1}$;
5) $a_n=\frac{n-3}{4-n}$;
6) $a_n=\frac{5n+3}{2-3n}$.

256. Leia jada piirväärtus, kui üldliige on antud kujul

1) $a_n=\frac{n^2+1}{2n^2+1}$;
2) $a_n=\frac{2n^2-3n}{n+5n^2}$;
3) $a_n=\frac{3n^2+2n-1}{n^2-3n+5}$;
4) $a_n=\frac{1-n^3}{n^3}$;
5) $a_n=\frac{3n^3}{2+n^3}$;
6) $a_n=\frac{n^3+n^2}{2-n^3}$;

7) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+n+1}$; 8) $a_n = \dfrac{3n^2-5}{2-n^2}$;

9) $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}$.

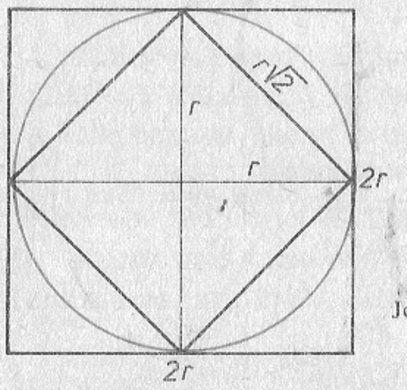
Järgnevalt tutvume jada piirväärtuse mõnede rakendustega. Esialgu tuletame jada piirväärtuse abil ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemid. Järgmises peatükis rakendame jada piirväärtuse mõistet ka pöördkehade külgpindala ja ruumala valemite tuletamisel.

4.7. RINGJOONE PIKKUS PIIRVÄÄRTUSENA

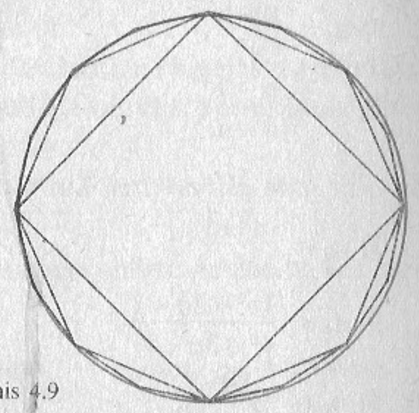
Ringjoon on kõverjoon, pikkuseühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), seetõttu ei ole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta. Kui ringjoon katki lõigata, võime ta tasandil kujutada lõiguna, mille pikkust saab mõõta. Seda arvestades on põhjust oletada, et ringjoonel on pikkus olemas. Seame nüüd ülesandeks selgitada, kuidas leida ringjoone pikkust tema raadiuse r kaudu. Joonisele 4.8 tuginedes võime kõigepealt väita, et ringoone pikkus c on suletud järgmiste tõkete vahele:

$$4r\sqrt{2} < c < 8r.$$

Joonestame ringjoone sisse korrapärase kõõlhulknurga. Selle ümbermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed kui kahe punkti vahelised sirglõigud on lühemad igast teisest nende punktide vahelisest joonest, seega ka lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui hulknurga tippude arvu kahekordistada, saame uue hulknurga, mille ümbermõõt on pikem eelmise hulknurga ümbermõõdust ja lühem ringjoone pikkusest. *Miks?* Kahekordistamise protsessi niiviisi jätkates saame hulknurgad, mis oma kujult ikka enam ja enam lähenevad ringjoonele (joon. 4.9).



Joonis 4.8



Joonis 4.9

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkust järgmiselt:

ringjoone pikkuseks c nimetatakse korrapäraste kõõlhulknurkade ümbermõõtude jada piirväärtust hulknurga tippude arvu tõkestamatul kasvamisel.

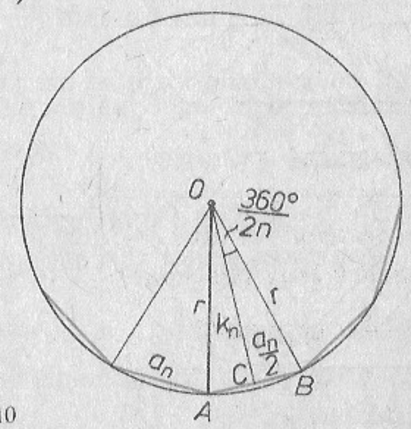
Olgu ringjoone sisse joonestatud korrapärane n-nurk (joon. 4.10). Ühendades hulknurga tipud ringjoone keskpunktiga, tekivad võrdhaarsed kolmnurgad alusega a_n ja haaraga r. Selle kolmnurga tipunurk on $\dfrac{360°}{n}$. Tõmbame hulknurga apoteemi k_n, mis on ka vaadeldava võrdhaarse kolmnurga kõrguseks. Apoteem jaotab antud kolmnurga OAB kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks OAC ja OBC. Nendes kolmnurkades on üks nurk $\dfrac{360°}{2n}$ ja selle nurga vastaskaatet $\dfrac{a_n}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin\frac{360°}{2n} \quad \text{ehk} \quad \frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360°}{2n}.$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga $2rn$, saame $n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin\dfrac{360°}{2n}$.

Et $n \cdot a_n$ väljendab sissejoonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõtu, siis on ringjoone pikkuseks

$$c = \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right).$$



Joonis 4.10

4 Vaatame, kuidas muutub avaldis $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$, kui n kasvab. Selleks koostame alljärgneva tabeli:

n	$\frac{360°}{2n}$	$\sin\frac{360°}{2n}$	$n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$
3	60°	0,8660	2,5980
6	30°	0,5000	3,0000
12	15°	0,2588	3,1056
24	7°30′	0,1305	3,1320
48	3°45′	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu kohtadega tabeleid, siis võib tähele panna, et peale 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$ väärtusena, jäävad edaspidi n suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159 jne.

Selle jada piirväärtust tähistatakse kreeka tähega π, seega

V $$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right)=\pi$$.

Arv π on irratsionaalarv, mille lähisväärtusena kõige enam kasutatakse arvu 3,14. Ringjoone pikkuse c kohta võime nüüd kirjutada

$$c=\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2r \cdot \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right)=2r \cdot \pi$$

ehk vahepealseid kirjutisi ära jättes

V $$c=2\pi r$$.

Et $2r=d$, kus d on ringjoone diameeter, siis ka $c=\pi d$.

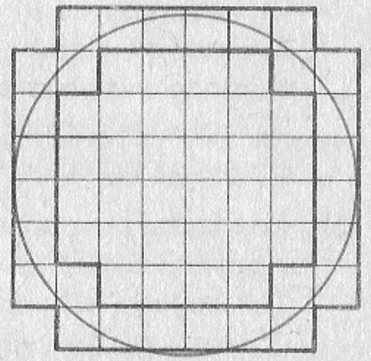
Avaldades sellest võrdusest π saame võrduse

$$\pi=\frac{c}{d},$$

mis ütleb, et iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ning võrdub π-ga.

4.8. RINGI PINDALA PIIRVÄÄRTUSENA

Ringi pindala otsene võrdlemine pinnamõõduühikuteks olevate ruutudega, nagu mm², cm², dm² jt. ei ole võimalik, sest ringjoon on kõverjoon, pinnamõõduühiku serv aga sirgiõik. Joonestades ringjoone ruudulisele paberile, võime ruutude loendamise teel öelda pindala mõõtarvu, millest meie ringi pindala on väiksem ja pindala mõõtarvu, millest meie ringi pindala on suurem (joon. 4.11). Meid huvitav ringi pindala mõõtarv S peab olema nende kahe arvu vahel.



Joonis 4.11

Et seda mõõtarvu leida, defineerime ringi pindala, kasutades jällegi sissejoonestatud korrapäraseid kõõlhulknurki.

Ringi pindala S all mõistame ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade S_n jada piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab, s. t.

m

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

kus S_n on korrapärase n-nurga pindala.

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, võime kirjutada:

$$S_n=(n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2} \text{ ja seega } S=\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2}\right).$$

Et $\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n)=2\pi r$ ja $\lim_{n\to\infty}k_n=r$, siis $S=2\pi r \cdot \frac{r}{2}=\pi r^2$

ehk

$$S=\pi r^2$$.

V

A.

257. Ringi pindala on võrdne kahe teise ringi pindala summaga. Leia ringi raadius, kui nende kahe teise ringi raadiused on
1) $r_1=3$ ja $r_2=4$; 2) $r_1=3{,}3$ ja $r_2=5{,}6$;
3) $r_1=6{,}5$ ja $r_2=7{,}2$; 4) $r_1=r$ ja $r_2=nr$.

258. Leia ruudu sise- ja ümberringjoonte pikkused ning nende ringide pindalad, kui
1) ruudu külg on 2 cm;
2) ruudu külg on 10 cm;
3) ruudu diagonaal on 5 cm;
4) ruudu diagonaal on 1,2 cm;
5) ruudu ümbermõõt on 24 cm;
6) ruudu pindala on 0,49 cm^2.

259. Leia korrapärase kolmnurga ümber- ja siseringjoonte pikkused ning ringide pindalad, kui
1) kolmnurga külg on 8 cm;
2) kolmnurga külg on 1,3 cm;
3) kolmnurga kõrgus on 6 cm;
4) kolmnurga kõrgus on 3,2 dm;
5) kolmnurga ümbermõõt on 12,3 m;
6) kolmnurga pindala on 3 m^2.

260. Leia korrapärase kuusnurga ümber- ja siseringjoonte pikkused ning ringide pindalad, kui
1) kuusnurga külg on 1,2 cm;
2) kuusnurga külg on 0,6 m;
3) kuusnurga apoteem on 3,2 mm;
4) kuusnurga apoteem on 0,15 dm;
5) kuusnurga ümbermõõt on 13,2 cm;
6) kuusnurga pindala on 3,3 dm^2.

B.

261. Ring raadiusega r jaotatakse kahe kontsentrilise ringjoonega kolmeks võrdpindseks osaks. Leia nende ringjoonte raadiused.

262. Korrapärase hulknurga ümbermõõt ja ringjoone pikkus on võrdsed. Kuidas suhtuvad nende pindalad, kui hulknurk on
1) kolmnurk; 2) nelinurk; 3) kuusnurk?

263. Korrapärasel hulknurgal ja ringil on võrdsed pindalad. Kuidas suhtuvad nende ümbermõõdud, kui hulknurk on
1) kolmnurk; 2) nelinurk; 3) kuusnurk?

264. Ringjoonele raadiusega r_1 joonestatakse ümber teine kontsentriline ringjoon raadiusega r_2 nii, et kahe ringjoone vahele jääv rõngas on $\frac{1}{n}$ antud ringi pindalast. Leia r_2, kui
1) $n=4$; 2) $n=8$; 3) $n=10$.

KORDAMINE

265. Mis on arvjada?

266. Missugust jada nimetatakse aritmeetiliseks?

267. Kuidas avaldub aritmeetilise jada üldliige a_n jada vahe d ja esimese liikme a_1 kaudu?

268. Kuidas avaldub aritmeetilise jada esimese n liikme summa S_n esimese liikme a_1, n-nda liikme a_n ja liikmete arvu n kaudu?

269. Rakett lendas pärast starti esimeses sekundis 42 m, igas järgnevas sekundis aga 280 m võrra rohkem. Leia raketi lõppkiirus, kui ta saavutab selle 26. sekundi lõpuks.

270. Maanteel liiguvad teineteisele vastu kaks autot, mille vahemaa on teatud momendil 200 m. Esimese auto kiirus on sel momendil 12 m/s ja teise auto kiirus 20 m/s. Pidurdamise tõttu väheneb teise auto kiirus igas sekundis 2 m/s võrra, esimene aga jätkab sõitu endise kiirusega. Mitme sekundi pärast need autod kohtuvad?

271. Missugust jada nimetatakse tõkestamatult kasvavaks?

272. Missugust jada nimetatakse hääbuvaks?

273. Mis tingimusel on arv B jada
$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$
piirväärtuseks?

274. Leia jada piirväärtus, kui tema üldliige on
1) $\frac{2n-1}{3}$; 2) $\frac{1}{2n+1}$; 3) $\frac{2n-1}{3n}$;

4) $\frac{2n+1}{3n-1}$; 5) $\frac{2n-1}{3n^2}$; 6) $\frac{3n^2}{3n+1}$.

275. Kuidas avaldub arv π ringjoone pikkuse ja läbimõõdu kaudu?

276. Ristküliku ühe külje pikkus on $2r$. See ristkülik on võrdpindne ringiga, mille raadius on r. Leia ristküliku ümbermõõt ja pindala.

277. Leia ringiga võrdpindse ruudu külg, kui ringi diameeter on d.

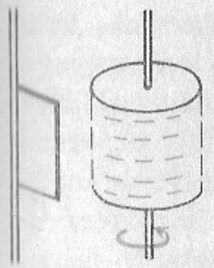
5. PÖÖRDKEHAD

Võtame ristkülikukujulise traatkontuuri ja paneme selle ühe külje ümber pöörlema (joon. 5.1). Pöörlev traatkontuur eraldab ruumist keha, mida nimetatakse **silindriks.**

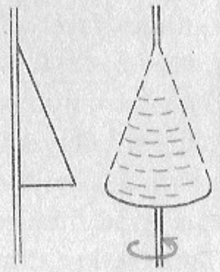
Järgnevalt paneme pöörlema täisnurkse kolmnurga kujulise traatkontuuri ümber ühe tema kaateti (joon. 5.2). Nüüd eraldub ruumist keha, mida nimetatakse **koonuseks.**

Poolringjoone pöörlemisel diameetri ümber eraldub ruumist keha, mida nimetatakse keraks (joon. 5.3).

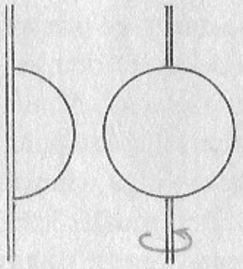
Et kõik need kehad eraldusid ruumist ühe traatkontuuri pöörlemise teel, siis nimetatakse neid kehi **pöördkehadeks** (joon. 5.4).



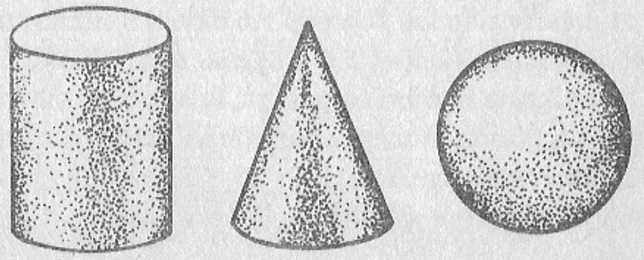
Joonis 5.1



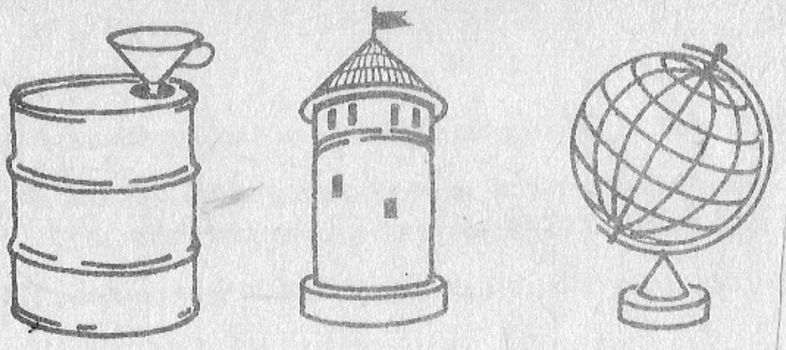
Joonis 5.2



Joonis 5.3



Joonis 5.4



Joonis 5.5

Meid ümbritsevas tegelikkuses on kehi, mis ise või millede osad kujutavad pöördkehi. *Missuguseid kehi tunned jooniselt 5.5? Too näiteid pöördkehade kohta, mis ei ole silindrid, koonused ega kerad. Joonista vihikusse vastav traatkontuur ja sirge, mille ümber ta pöörleb. Täienda joonist veel selle traatkontuuri sümmeetrilise asendiga valitud sirge suhtes ning skitseeri pöördkeha.*

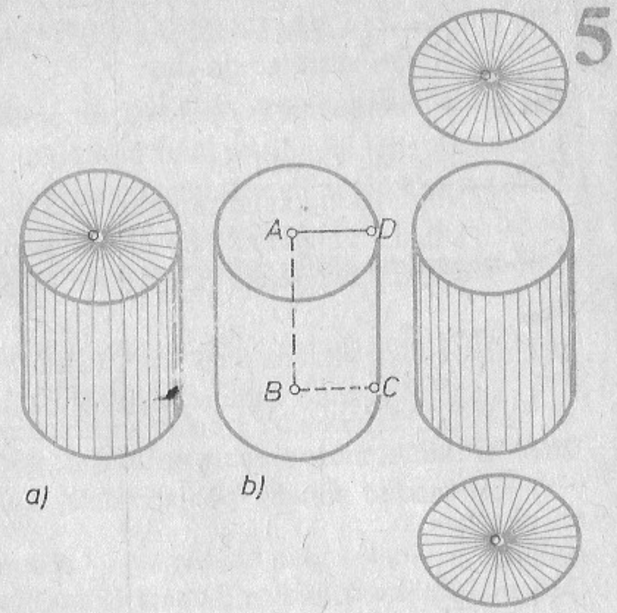
5.1. SILINDER

m **Silindriks nimetatakse keha, mille moodustab ühe oma külje ümber pöörlev ristkülik.**

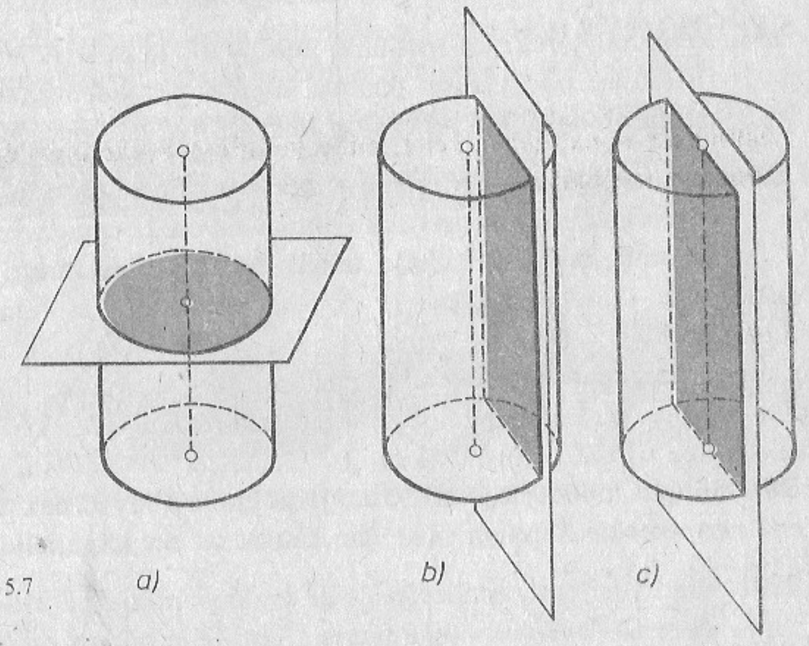
Külge, mille ümber ristkülik pöörleb, nimetatakse silindri **teljeks.** Telje vastaskülge (samuti tema pikkust) nimetatakse silindri **moodustajaks.** Ristküliku pöörlemisel on telg paigal, moodustajal võib aga olla lõpmata palju eriasendeid. Nende kaudu tekibki meil kujutlus silindrit ruumist eraldavast pinnast. Seda pinda nimetatakse silindri **külgpinnaks.** Ristküliku ülejäänud kaks külge võivad samuti omada lõpmata palju eriasendeid. Nende kaudu tekib kujutlus kahest ringist, mis sulgevad silindri külgpinna, eraldades sellega ruumist silindri. Neid ringe nimetatakse silindri **põhjadeks.** Niisiis, silindri pind koosneb kolmest osast: külgpinnast ja kahest põhjast.

Joonisel 5.6 *a* on kujutatud pöörleva ristküliku paljud eriasendid ning kujuteldav silinder. Joonisel 5.6 *b* on *AB* silindri telg ja *DC* moodustaja üks eriasendeid. Joonisel 5.6 *c* näeme eraldi silindri külgpinda ja kaht põhja.

Lõikame silindrit tasandiga, mis on risti silindri teljega. Silindri ja selle tasandi ühisosa nimetatakse silindri **ristlõikeks** (joon. 5.7 *a*). Lõikame nüüd silindrit tasandiga, mis läbib telge. Silindri ja tema telge läbiva tasandi ühisosa nimetatakse silindri **telglõikeks** (joon. 5.7 *c*).



Joonis 5.6



Joonis 5.7

A.

278. Tõesta, et
1) silindri telglõige on ristkülik;
2) silindri iga kaks telglõiget on kongruentsed;
3) silindri teljega paralleelne lõige on ristkülik (joon. 5.7 *b*).

ü

279. Tõesta, et
1) silindri ristlõige on ring;
2) silindri iga kaks ristlõiget on kongruentsed.

280. Missugune kujund on
1) silindri külgpinna ja põhja ühisosa?
2) silindri külgpinna ja ristlõike ühisosa?
3) silindri külgpinna ja telglõike ühisosa?

281. Ristküliku pindala on 17 cm². Ristkülik pöörleb ühe külje ümber. Kui suur on saadud silindri telglõike pindala?

282. Ristkülik, mille pindala on 20 cm², pöörleb ühe külje ümber. Kui suur on saadud silindri põhjapindala, kui selle silindri moodustaja on 4 cm?

283. Ristküliku küljed on 7 cm ja 11 cm. Kui suur on selle ristküliku pöörlemisel ümber lühema külje tekkiva silindri põhjade vaheline kaugus ja kui suur on põhjapindalade summa?

284. Neliñurk $ABCD$ on ristkülik, $\widehat{DBC}=30°$ ja $BC=12$ cm. Arvuta selle ristküliku pöörlemisel tekkiva silindri põhjade vaheline kaugus ja põhja pindala, kui teljeks on lõik AB.

285. Arvuta ristküliku pöörlemisel tekkiva silindri moodustaja pikkus ja põhja raadius, kui ristküliku diagonaal on 22 cm, diagonaalidevaheline nurk on 60° ja silindri teljeks on ristküliku lühem külg.

B.

286. Silindri telg on 5 cm ja põhja raadius 6 cm. Kui pikk on telglõike diagonaal?

287. Silindri moodustaja on 30 cm ja põhja raadius 25 cm. Silindri teljega paralleelne lõige on ruut. Kui kaugel on see lõige teljest?

288. Silindri teljega paralleelne lõige eraldab põhja piiravast ringjoonest kaare 120°. Arvuta lõike pindala, kui telje pikkus on 10 cm ja lõige on teljest 2 cm kaugusel.

289. Silindri põhja ja telglõike pindala suhe on $\pi : 4$. Kui suur on telglõike diagonaalide vaheline nurk?

5.2. SILINDRI PINNALAOTUS JA PINDALA

Lõikame silindri külgpinna üht moodustajat mööda lahti (joon. 5.8) ja laotame tasandile. Tekib ristkülik, mida nimetatakse silindri **külgpinnalaotuseks**. Silindri külgpinnalaotuse pindala nimetatakse silindri **külgpindalaks**. Et ristküliku üks külg on võrdne silindri põhja ümbermõõdu ja teine silindri moodustajaga, siis **silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.**

Silindri põhjade vahelist ristlõiku (samuti selle pikkust) nimetatakse silindri **kõrguseks**. Seega on ka moodustaja ja telg silindri kõrguseks. Olgu silindri põhja raadius r ja kõrgus h ning silindri külgpindala S_k, siis

$$\boxed{S_k = 2\pi rh}$$

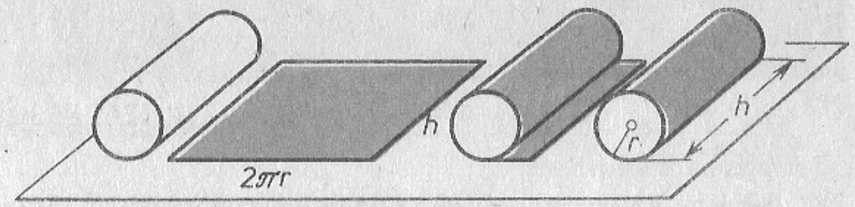
Võtame nüüd silindri, lõikame ära tema põhjad ning külgpinna lõikame jälle lahti üht moodustajat mööda. Laotame külgpinna tasandile ja asetame selle juurde ka silindri põhjad. Oleme saanud silindri **pinnalaotuse** (joon. 5.9). Silindri pinnalaotuse pindala nimetatakse silindri **täispindalaks**. Silindri täispindala koosneb seega külgpindalast ning kahe põhja pindalast. Tähistades silindri täispindala S_t ja põhja pindala S_p, saame valemi

$S_t = S_k + 2S_p$.

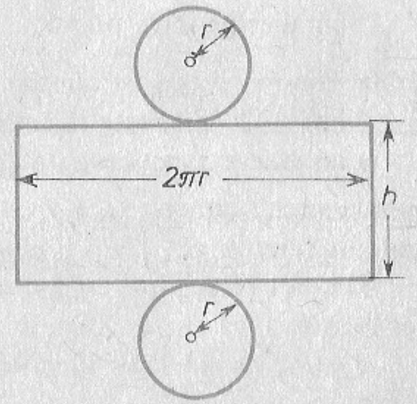
Et $S_k = 2\pi rh$ ja $S_p = \pi r^2$, siis $S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

ehk

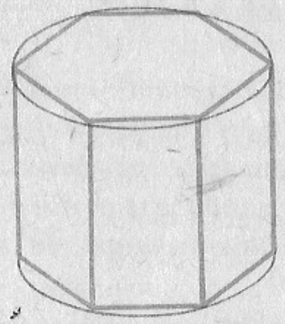
$$\boxed{S_t = 2\pi r(h + r)}$$



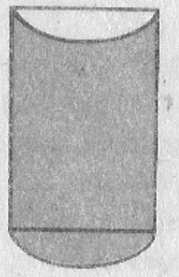
Joonis 5.8



Joonis 5.9



Joonis 5.10



Joonis 5.11

Seame nüüd eesmärgiks jõuda silindri külgpindala valemini silindrilist pinda lahti lõikamata. Et kõverpinna võrdlemine pinnamõõduga pole otseselt teostatav, siis defineerime silindri pindala jada piirväärtuse mõistet kasutades.

Kujundame silindrisse korrapärase n-nurkse prisma (joon. 5.10). On ilmne, et prisma külgtahuks oleva ristküliku pindala on väiksem silindri külgpinna vastavast osast (joon. 5.11). Järelikult on prisma külgpindala S_n väiksem kui silindri külgpindala S_k. Kui prisma põhja tippude arvu suurendada näiteks kahekordistamise teel, saame prisma, mille külgpindala on suurem endise prisma külgpindalast (*miks?*), kuid väikem silindri külgpindalast. Seda tähelepanekut aluseks võttes defineerimegi silindri külgpindala järgmiselt.

Silindri külgpindalaks S_k nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapäraste prismade külgpindalade S_n jada piirväärtust, kui prisma põhja tippude arv tõkestamatult kasvab:

$$S_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Et $S_n = n \cdot a_n \cdot h$, kus n on prisma põhja tippude arv, a_n selle põhja serv ja h prisma kõrgus, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n \cdot h) = h \cdot \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = h \cdot 2\pi r.$$

Seega

$$\boxed{S_k = 2\pi rh}$$

Näide 1. Selgitame, kui palju plekki kulub silindrikujulise ahju külgpinna valmistamiseks, kui ahju kõrgus on 13,50 dm ja läbimõõt 5,40 dm ning kasutatud plekist 4 % kulub plekiäärte ühendamiseks.

Leiame kõigepealt ahju ümbermõõdu. Selleks korrutame läbimõõdu arvuga π:

$5{,}40 \cdot 3{,}14 = 16{,}956 \approx 16{,}96$ (dm).

Külgpindala leidmiseks korrutame ümbermõõdu kõrgusega:

$16{,}96 \cdot 13{,}50 = 228{,}96$ (dm²).

Et külgpind moodustab 96 % kasutatud plekist, siis kasutatava pleki koguseks saame

$$\frac{229 \cdot 100}{96} \approx 239 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Seega ahju valmistamiseks kulub 239 dm² plekki.

Näide 2. Silindri külgpindala on neli korda suurem põhjapindalast. Silindri põhja raadius r on 7 cm. Arvutame silindri kõrguse h. Et antud juhul

$S_k = 4S_p = 4\pi r^2$

ja üldiselt $S_k = 2\pi rh$, siis

$$h = \frac{S_k}{2\pi r} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r} = 2r = 14 \text{ (cm)},$$

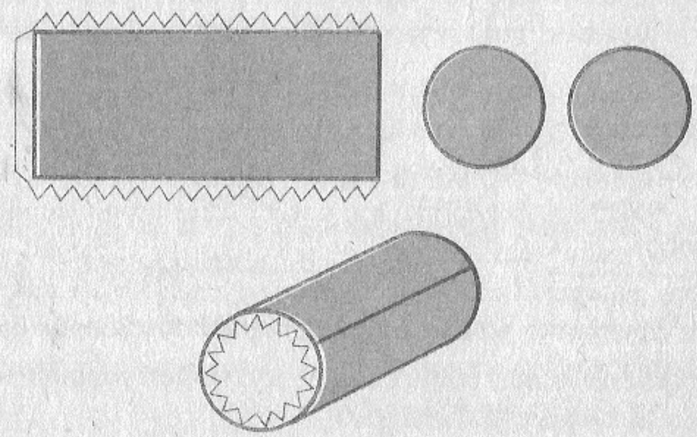
s. t. silindri kõrgus on 14 cm.

A.

290. Silindri kõrgus on 5 cm ja põhja raadius 2 cm. Joonesta silindri pinnalaotus.

291. Silindri kõrgus on 10 cm ja põhja raadius 4 cm. Valmista kartongist selle silindri mudel. Selleks joonesta külgpinnalaotus ühes kleepimiseks vajalike äärtega (joon. 5.12) ja lõika saadud kujund kartongist välja. Kleebi külgpind kokku. Moodusta põhjad ja kleebi need kohale.

292. Arvuta eelneva ülesande tingimuste järgi valmistatud mudeli külgpindala, põhja pindala ja täispindala.



Joonis 5.12

293. Silindri külgpinnalaotuse mõõtmed on 438 mm ja 65 mm. Arvuta silindri täispindala, teades, et $r<h$.

294. Silindri telglõige on ruut, mille külg on 12 cm. Arvuta silindri täispindala.

B.

295. Silindri telg on 15 cm ja telglõike diagonaal 17 cm. Arvuta silindri täispindala.

296. Mitu ruutmeetrit plekki kulub vihmaveetoru valmistamiseks, kui toru pikkus on 10,0 m, läbimõõt 12,0 cm ning valtsimiseks kulub 10 % materjalist?

297. Silindrikujulise korstna kõrgus on 12,0 m ja läbimõõt 5,0 dm. Mitu ruutdetsimeetrit plekki kulub korstna valmistamiseks, kui valtsimiseks kulub 10 % materjalist?

5.3. SILINDRI RUUMALA

Silindri ruumala defineeritakse samuti piirväärtusena, sest kõverpinnaga piiratud keha vahetu võrdlemine ruumalamõõduühiku — kuubiga — ei ole võimalik.

Tähistades korrapärase n-nurkse prisma (vt. joon. 5.10) ruumala V_n ja silindri ruumala V anname järgmise definitsiooni:

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n.$$

Sõnasta see definitsioon!

Et $V_n=\frac{n\cdot a_n\cdot k_n}{2}\cdot h$, kus k_n on prisma põhjaks oleva korrapärase n-nurga apoteem, mis n-i tõkestamatul kasvamisel läheneb silindri põhja raadiusele r, siis

$$\lim_{n\to\infty} V_n=\frac{h}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n)\cdot\lim_{n\to\infty} k_n=\frac{h}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2 h.$$

Seega

V $\boxed{V=\pi r^2 h}$ ehk $\boxed{V=S_p\cdot h}$,

kus S_p on silindri põhja pindala, s. t. silindri ruumala on võrdne põhjapindala ja kõrguse korrutisega.

Näide. Vasktraadi läbimõõt on 0,25 mm. Selgitame, kui palju kaalub 500 m seda traati, kui vase tihedus on 8,9 g/cm³ ja 1 kg vaske kaalub 9,8 N.

Antud vasktraat on vaadeldav peenikese silindrina. Arvutame esmalt selle silindri ruumala:

$r=0{,}125$ mm $=0{,}0125$ cm;

$h=500$ m $=5\cdot 10^4$ cm;

$V=(0{,}0125)^2\cdot 3{,}14\cdot 5\cdot 10^4\approx 1{,}56\cdot 3{,}14\cdot 5\approx 24{,}5$ (cm³).

Nüüd võime arvutada traadi massi

$24{,}5\cdot 8{,}9\approx 2{,}18$ (g)

ja traadi kaalu

$0{,}218\cdot 9{,}8\approx 2{,}14$ (N).

Seega traadi kaal on 2,14 N.

A.

298. Silindri ristlõike läbimõõt on 16 cm ja silindri kõrgus 2 dm. Arvuta silindri ruumala. ü

299. Silindri telglõike mõõtmed on 8 dm ja 3 dm. Arvuta silindri ruumala, kui $r<h$.

300. Arvuta ülesande 291 tingimuste järgi valmistatud silindri ruumala.

301. Mitu liitrit vett mahutab silindrikujuline anum, mille kõrgus on 9 dm ja seesmine läbimõõt on 6 dm?

302. Kaevu ristlõige on ring, mille diameeter on 12 dm. Mitu ämbrit vett on selles kaevus, kui vee sügavus kaevus on 2,1 m?

303. Kui suure ruumala võtab enda alla küttesegu sõiduauto «Moskvitš 2140» mootori silindris, kui kolb on alumises surnud seisus? Kolvi käik on 70 mm ja diameeter 82 mm.

304. Mitu tonni naftat mahutab silindrikujuline tsistern, mille läbimõõt on 9 m ja kõrgus 7 m? Nafta tihedus on 0,85 g/cm³.

305. 1 cm³ männipuidu mass on 0,52 g. Leia männipalgi mass, kui palgi pikkus on 4,5 m ja läbimõõt 22 cm.

306. Pumba silindri diameeter on 126 mm ja kolvikäik 203 mm. Mitu liitrit vett annab pump ühe tunni jooksul, kui kolb teeb minutis 30 töökäiku?

307. Kaevukaevamismasin kaevab ööpäeva jooksul 30 m sügavuse silindrikujulise kaevu, mille läbimõõt on 1,2 m. Arvuta masina jõudlus kuupmeetrites tunnis.

308. Tarvis on valmistada silindrikujuline anum, mille maht on 500 l. Kui kõrge peab olema anum, kui ta diameeter on 76 cm?

309. Silindrikujulise veenõu maht on 180 l. Nõu kõrgus on 1 m. Arvuta nõu põhja diameeter.

B.

310. Terastraadikera mass on 77 kg, traadi läbimõõt on 5 mm ja tihedus 7,85 g/cm³. Mitu meetrit on keras traati?

311. Termomeetri elavhõbedasamba pikkus on 15,6 cm ja mass 5,2 g. Elavhõbeda tihedus on 13,6 g/cm³. Arvuta samba ristlõike pindala.

312. Silindrikujuline mõõteklaas on kuupsentimeetriliste jaotustega. Kahe järjestikulise jaotuse vaheline kaugus on 1,8 cm. Arvuta mõõteklaasi seesmine läbimõõt.

313. Silindrikujulise mõõteklaasi seesmine läbimõõt on 4 cm ja iga jaotus on 5 cm³. Kui suur on kahe järjestikuse jaotuse vaheline kaugus?

314. Silindrikujuline teeklaas, mille seesmine läbimõõt on 5,6 cm, on pooleni täidetud veega. Pärast seda, kui klaasi pandi kivi, mille mass on 128 g, tõusis vee pind 2 cm võrra: Arvuta selle kivi tihedus.

315. Malmtoru seina paksus on 5 mm; toru seesmine diameeter on 75 mm. Arvuta 3 m pikkuse toru mass, teades, et malmi tihedus on 7,2 g/cm³.

316. 6 m pikkuse vasktoru väline läbimõõt on 36 mm ja sisemine 30 mm. Leia toru ristlõike pindala ja mass, kui vase erikaal on 8,9 g/cm³.

317. Silo on paigutatud silindrikujulisse torni, mis on 4,2 m kõrge ja mille põhja läbimõõt on 3,5 m. Kui suur on anuma ruumala? Kui kauaks jätkub silo, kui päevane vajadus on 0,25 m³?

318. Kuidas suhtuvad kahe võrdse ruumalaga silindri kõrgused, kui nende põhjade läbimõõdud suhtuvad nagu 1 : 2?

319. Ristkülik mõõtmetega 4 cm×8 cm pannakse pöörlema üks kord lühema, teine kord pikema külje ümber. Leia tekkivate pöördkehade külgpindala, täispindala ja ruumala.

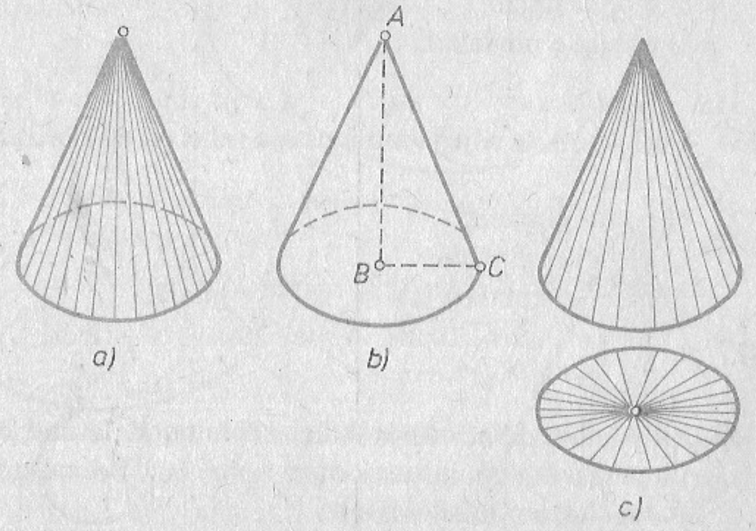
5.4. KOONUS

Koonuseks nimetatakse keha, mille moodustab ühe oma kaateti ümber pöörlev täisnurkne kolmnurk.

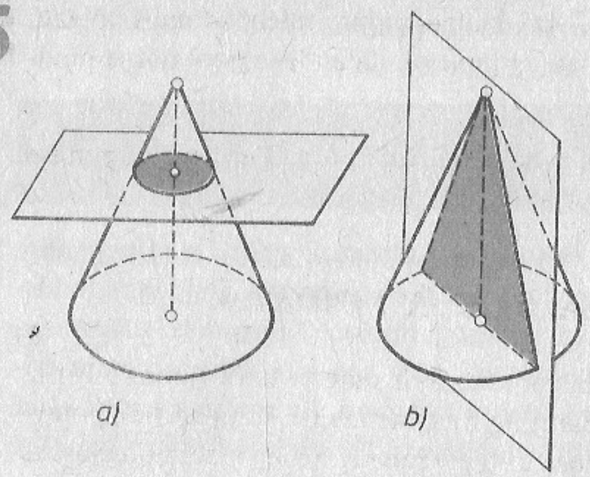
Seda kaatetit, mille ümber täisnurkne kolmnurk pöörleb, nimetatakse koonuse **teljeks**, hüpotenuusi aga koonuse **moodustajaks**. Telje ja moodustaja ühist tippu nimetatakse ka koonuse **tipuks**. Täisnurkse kolmnurga pöörlemisel on telg paigal, moodustajal võib aga olla lõpmata palju eriasendeid, mille tulemusel tekib koonuse **külgpind**. Kolmnurga teine kaatet võib samuti omada lõpmata palju eriasendeid. Nende kaudu tekib kujutlus ringist, mis sulgeb koonuse külgpinna, eraldades sellega rumist koonuse. Seda ringi nimetatakse koonuse **põhjaks**. Niisiis koosneb koonuse pind koonuse külgpinnast ja põhjast.

Koonuse telge (ja tema pikkust) nimetatakse ka koonuse **kõrguseks**. Joonisel 5.13 *a* on kujutatud pöörleva kolmnurga paljud eriasendid ning kujuteldav koonus. Joonisel 5.13 *b* on *AB* koonuse telg, *AC* koonuse moodustaja üks eriasend ja *BC* põhja raadiuse üks eriasend. Joonisel 5.13 *c* näeme eraldi koonuse külgpinda ja põhja.

Lõikame koonust tasandiga, mis on risti koonuse teljega. Koonuse ja tema põhjaga paralleelse tasandi ühisosa nimetatakse koonuse **ristlõikeks** (joon. 5.14). Lõikame nüüd koonust tasandiga, mis läbib koonuse telge. Sel juhul nimetatakse koonuse ja tasandi ühisosa koonuse **telglõikeks** (joon. 5.14 *b*).



Joonis 5.13



Joonis 5.14

A.

ü **320.** Koonuse põhja raadius on 11 cm ja telglõige on täisnurkne kolmnurk. Leia telglõike pindala.

321. Koonuse telglõike pindala on 3 dm². Kui pikk on moodustaja, kui telg on 2 dm?

322. Koonuse põhja raadius on 8 dm. Leia telje keskpunkti läbiva ristlõike pindala.

323. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 30° ja selle vastaskaatet on 7 cm. Leia selle kolmnurga pöörlemisel moodustuvate koonuste
1) teljed;
2) moodustajad;
3) põhjade pindalad.

324. Nurk koonuse telje ja moodustaja vahel on 60°. Moodustaja on 4 dm. Arvuta
1) põhja pindala;
2) telglõike pindala;
3) telje keskpunkti läbiva ristlõike pindala.

B.

325. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk. Tasand läbib koonuse tippu ja eraldab põhja ringjoonest kaare 60°. Koonuse põhja raadius on 2 cm. Arvuta lõike pindala.

326. Koonuse telg on 28,3 cm. Kui kaugel tipust tuleb koonust lõigata põhjaga paralleelse tasandiga, et lõike pindala oleks pool põhja pindalast?

327. Koonuse põhja ja telglõike pindalade suhe on π. Leia nurk koonuse telje ja moodustaja vahel.

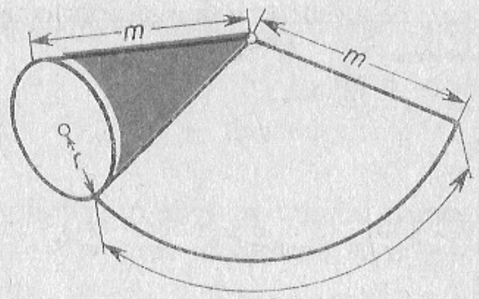
5.5. KOONUSE PINNALAOTUS JA PINDALA

Lõikame koonuse külgpinna üht moodustajat mööda lahti (joon. 5.15) ja laotame tasandile. Tekib ringi sektor, mida nimetatakse koonuse **külgpinnalaotuseks** ja selle pindala koonuse **külgpindalaks**. Selle sektori raadiuseks on koonuse moodustaja m ja kaare pikkuseks koonuse põhja ümbermõõt $2\pi r$.

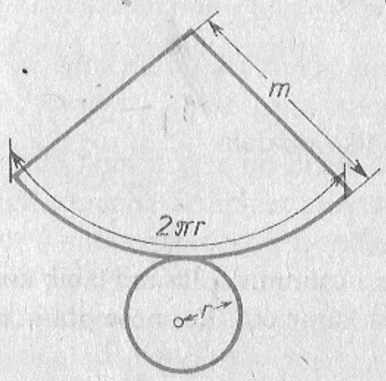
Võtame nüüd koonuse ning lõikame ära tema põhja. Külgpinna lõikame lahti jälle üht moodustajat mööda. Laotame külgpinna tasandile ja selle juurde asetame põhja. Oleme saanud koonuse **pinnalaotuse** (joon. 5.16). Koonuse pinnalaotuse pindala nimetatakse koonuse **täispindalaks**. Koonuse täispindala S_t koosneb seega külgpinnast S_k ja põhja pindalast S_p:

V $\boxed{S_t = S_p + S_k}$.

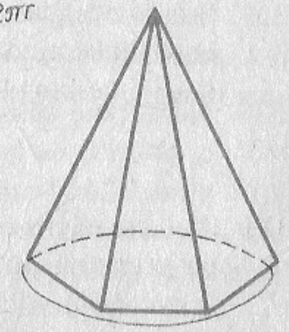
Järgnevalt seame eesmärgiks jõuda koonuse külgpindala ja seega ka täispindala valemini. Et koonuse külgpinna võrdlemine pinnamõõduühiku-



Joonis 5.15



Joonis 5.16



Joonis 5.17

ga pole otseselt teostatav, siis defineerime koonuse külgpindala korrapäraste püramiidide külgpindalade piirväärtusena.

Koonuse külgpindalaks nimetatakse koonuse sisse kujundatud korrapäraste püramiidide (joon. 5.17) külgpindalade S_n jada piirväärtust, kui püramiidi põhja tippude arv tõkestamatult kasvab:

$$S_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Et $S_n = \frac{n \cdot a_n \cdot m_n}{2}$, kus m_n on püramiidi apoteem, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot a_n \cdot m_n}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} m_n.$$

Kui püramiidi põhja tippude arv tõkestamatult kasvab, siis püramiidi apoteem m_n läheneb koonuse moodustajale m ja $n \cdot a_n$ läheneb põhja ümbermõõdule $2\pi r$:

$$\lim_{n\to\infty} m_n = m \text{ ja } \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r.$$

Seega

$$S_k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot m = \pi r m$$

ehk

$$\boxed{S_k = \pi r m},$$

s. t. koonuse külgpindala võrdub poolega põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisest.

Ühtlasi oleme n. id leidnud ka koonuse täispindala:

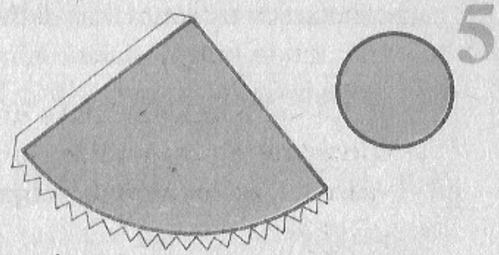
$$\boxed{S_t = \pi r(r + m)}.$$

A.

328. Koonuse kõrgus on 4 dm ja põhja raadius 3 dm. Arvuta koonuse külg- ja täispindala.

329. Koonuse telglõige on võrdkõlgne kolmnurk, mille külg on 8 dm. Arvuta koonuse täispindala.

330. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b ning hüpotenuus on c, pöörleb ümber kaateti a. Arvuta tekkinud koonuse külg- ja täispindala, kui
1) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm;
2) $a = 15$ cm, $c = 25$ cm;
3) $b = 5{,}30$ cm, $c = 10{,}2$ cm.



Joonis 5.18

331. Koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadius on 10 cm ja nurk 90°. Joonesta see sektor, varusta kleepimiseks vajalike äärtega (joon. 5.18) ja kleebi kokku koonuse külgpinna mudel. Arvuta koonuse põhja raadius, joonesta põhi ja kleebi see oma kohale koonuse mudelil. Arvuta saadud mudeli külg- ja täispindala.

332. Koonuse kõrgus on 6 cm ja põhja diameeter 16 cm. Valmista kartongist selle mudel. Arvuta külg- ja täispindala.

333. On tarvis valmistada plekist koonus, mille põhja läbimõõt on 18 cm ja moodustaja 25 cm. Kui palju plekki kulub, kui materjali kadu on 10 %?

334. Koonusekujulise telgi kõrgus on 3,7 m ja põhja läbimõõt 4,4 m. Mitu ruutmeetrit riiet kulub telgi valmistamiseks?

335. Koonusekujulise katuse rääsa pikkus on 18,5 m ja tipu kaugus räästast 7,4 m. Kui suur on selle katuse pindala?

336. Leia koonuse kõrgus, kui koonuse külgpindala on 0,42 dm² ja moodustaja 7 cm.

B.

337. Mitu ruutmeetrit plekki kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 2,90 m, torni läbimõõt 7,20 m ja valtsimiseks kulub 7 % materjalist?

338. Mitu katusekivi kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 3,8 m, torni läbimõõt 8,4 m ja ühe ruutmeetri katmiseks kulub 15 kivi?

339. Silotorni katus on koonusekujuline. Katuse kõrgus on 2,0 m ja torni läbimõõt 6,0 m. Mitu lehte katuseplekki kulub katuse katmiseks, kui lehe mõõtmed on 0,70 m ja 1,40 m ning pleki valtsimiseks kulus 8 % kogu vajatavast plekist?

340. Petrooleuminõu põhja läbimõõt on 24 cm, silindrilise osa kõrgus 28 cm ja koonilise osa kõrgus 15 cm. Kui palju on vaja sellise nõu värvimiseks värnitsat, kui 1 m² värvimiseks kulub 100 g värnitsat?

5.6. KOONUSE RUUMALA

Tähistame koonusesse kujundatud korrapärase n-nurkse püramiidi (vt. joon. 5.17) ruumala V_n ja defineerime koonuse ruumala V järgmiselt:

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Sõnasta see definitsioon!

Et $V_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{n \cdot a_n \cdot k_n}{2} \cdot h$, kus a_n on selle püramiidi põhja serv ja k_n põhja apoteem ning h püramiidi kõrgus, siis

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{h}{6} \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} k_n = \frac{h}{6} \cdot 2\pi r \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

ehk

V $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$ ehk $\boxed{V = \frac{1}{3} S_p \cdot h}$,

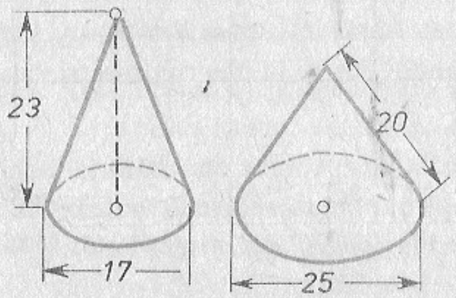
kus S_p on koonuse põhja pindala. Seega **koonuse ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.**

A.

ü **341.** Arvuta joonisel 5.19 kujutatud koonuste ruumalad.

342. Koonusekujulise kivisõehunniku ümbermõõt on 5,4 m ja kõrgus 1,2 m. Kui suur on selles hunnikus oleva kivisõe mass, kui kivisõe tihedus on 1,3 g/cm³?

343. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on 8,6 m ja kõrgus 1,2 m. Mitu tonni kartuleid on selles kuhjas, kui 1 hl kartulite mass on 72 kg?



Joonis 5.19

344. Koonusekujulise liivakuhja põhja ümbermõõduks saadi sammudega mõõtes 22 m. Silma järgi hinnates loeti kuhja kõrguseks 2 m. Mitu sõitu tuleb teha 3-tonnise veoautoga selle kuhja äravedamisel, kui liiva tihedus on 1,7 g/cm³?

345. Ümmarguse terava tipuga telgi läbimõõt maapinnal on 4,0 m ja kõrgus 3,0 m. Kui suure maatüki katab see telk? Kui suur on telgi maht?

346. Kui palju kaalub vasest koonus vees, kui koonuse põhja diameeter on 4 cm ja kõrgus 5 cm ning vase tihedus on 8,8 g/cm³ ja 1 kg vaske kaalub 9,8 N?

347. Vasetükist, mis kaalub 235,2 N, on tarvis valada koonus, mille põhja raadius on 10 cm. Leia selle koonuse kõrgus.

348. Täidetud koonusekujulisest anumast, mille kõrgus on 0,18 m ja põhja läbimõõt 0,24 m, valatakse vedelik ümber silindrikujulisse anumasse, mille põhja läbimõõt on 0,10 m. Kui kõrgel on vedeliku pind silindrikujulises anumas?

B.

349. Koonuse telglõige on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 16 m². Arvuta koonuse ruumala.

350. Koonuse põhja pindala on 25π cm² ja täispindala 90π cm². Arvuta koonuse ruumala.

351. Koonuse kõrgus on 15 m ja ruumala 2000π m³. Arvuta koonuse täispindala.

352. Koonuse kõrgus on 12 cm ja külgpindala 65π cm². Arvuta koonuse ruumala.

353. Koonuse põhja pindala on 100π cm² ja moodustaja on kõrgusest 2 cm võrra pikem. Arvuta koonuse ruumala.

354. Leia koonuse külgpindala, täispindala ning ruumala, kui
1) $r = 4$ cm ja $h = 6$ cm; 2) $d = 10$ cm ja $h = 40$ cm.

355. Leia koonuse külgpindala, täispindala ja ruumala, kui koonuse kõrgus on 2,5 m ja põhja ümbermõõt 1,8 m.

356. Koonusekujuline liivakuhi, mille põhja ümbermõõt on 22 m ja kõrgus 3 m, veetakse ära 3-tonnise kandejõuga veoautoga. Mitu sõitu peab masin tegema, kui liiva tihedus on 1800 kg/m³?

357. 11-m ümbermõõduga silindrikujuline torn kaetakse 6 m kõrguse koonusekujulise plekist katusega. Kui suur on katuse maksumus, kui 1 m² katuse paneku eest tuleb maksta 5,60 rbl.?

358. Täisnurkne kolmnurk kaatetiga 24 cm ja 8 cm pannakse pöörlema üks kord lühema, teine kord pikema kaateti ümber. Leia tekkivate pöördkehade külgpindala, täispindala ja ruumala.

KORDAMINE

359. Missuguseid kehi nimetatakse
1) hulktahukateks? 2) pöördkehadeks?

360. Missugust hulktahukat nimetatakse
1) prismaks? 2) püramiidiks?

361. Missugust pöördkeha nimetatakse
1) silindriks? 2) koonuseks?

362. Defineeri korrapärane prisma ja korrapärane püramiid.

363. Avalda valemina korrapärase prisma külgpindala, täispindala ja ruumala.

364. Avalda valemina korrapärase püramiidi külgpindala, täispindala ja ruumala.

365. Missugune kujund on
1) silindri; 2) koonuse
pinnalaotuseks?

366. Defineeri
1) silindri; 2) koonuse
külgpindala ja ruumala.

367. Avalda valemina silindri külgpindala, täispindala ja ruumala.

368. Avalda valemina koonuse külgpindala, täispindala ja ruumala.

369. Silindrisse, mille põhja raadius on r ja kõrgus h, on kujutatud korrapärane kuusnurkne prisma. Leia
1) silindri külgpindala ja ruumala;
2) prisma külgpindala ja ruumala;
3) mitme protsendi võrra on silindri külgpindala suurem kui prisma külgpindala;
4) mitme protsendi võrra on silindri põhja pindala suurem kui prisma põhja pindala;
5) mitme protsendi võrra on silindri ruumala suurem kui prisma ruumala.

370. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui
1) $r=5$ ja $h=8$;
2) $r=1{,}2$ ja $h=3{,}6$;
3) $r=15$ ja $h=10$;
4) $r=0{,}32$ ja $h=2{,}1$.

371. Silindrisse, mille raadius on r ja kõrgus h, on kujutatud korrapärane 6-, 12- ja 24-nurkne prisma. Leia nende prismade külgpindala ja ruumala. Mitu protsenti silindri külgpindalast (ruumalast) moodustab 6-, 12- ja 24-nurkse prisma külgpindala (ruumala)?

372. Koonusesse, mille põhja diameeter on d ja kõrgus h, on kujutatud korrapärane nelinurkne püramiid. Leia
1) koonuse külgpindala ja ruumala;
2) püramiidi külgpindala ja ruumala;
3) mitme protsendi võrra on koonuse külgpindala suurem kui püramiidi külgpindala;
4) mitme protsendi võrra on koonuse põhja pindala suurem kui püramiidi põhja pindala;
5) mitme protsendi võrra on koonuse ruumala suurem kui püramiidi ruumala.

373. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui
1) $d=12$ ja $H=8$; 2) $d=1{,}6$ ja $h=0{,}6$;
3) $d=10$ ja $h=12$; 4) $d=0{,}8$ ja $h=0{,}3$.

374. Koonusesse, mille põhja raadius on r ja kõrgus h, on kujutatud korrapärased 6-, 12- ja 24-nurksed püramiidid. Leia nende püramiidide külgpindala, täispindala ja ruumala. Mitu protsenti koonuse külgpindalast (täispindalast, ruumalast) moodustab korrapärase 6-, 12- ja 24-nurkse püramiidi külgpindala (täispindala, ruumala)?

6. TRIGONOMEETRIA

KORDAMINE

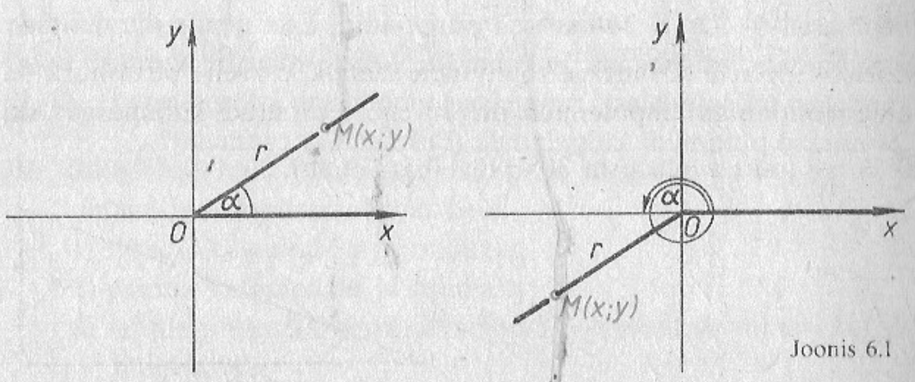
Kaheksandast klassist on teada, et nurka α nimetatakse selle veerandi nurgaks, kuhu satub nurga lõpphaar, kui nurga tipp asetseb koordinaatide alguspunktis ning nurga alghaar ühtib abstsisstelje positiivse suunaga. Nii näiteks on joonisel 6.1 *a* esimese veerandi nurk, joonisel 6.1 *b* aga kolmanda veerandi nurk.

Et nurga lõpphaara asend ei muutu, kui nurka täispöörde võrra suurendada või vähendada, siis on nurk $\alpha + n \cdot 360°$ (kus $n \in \mathbb{Z}$) sama veerandi nurk, mis nurk α.

Näide 1. Selgitame, millise veerandi nurk on $-1120°$. Et selle nurga saab esitada kujul $-1120° = -40° - 3 \cdot 360°$ ja $\alpha = -40°$ on neljanda veerandi nurk, siis on ka nurk $-1120°$ neljanda veerandi nurk. Samale tulemusele jõuame aga ka siis, kui esitame nurga kujul $-1120° = 320° - 4 \cdot 360°$, kus $\alpha = 320°$ on samuti neljanda veerandi nurk.

Tuletame meelde nurga α siinuse, koosinuse ja tangensi definitsioone:

nurga α siinuseks nimetatakse nurga lõpphaara mis tahes punkti ordinaadi suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist;



Joonis 6.1

nurga α koosinuseks nimetatakse nurga lõpphaara mis tahes punkti abstsissi suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist;

nurga α tangensiks nimetatakse nurga lõpphaara mis tahes punkti ordinaadi ja abstsissi suhet.

Neid definitsioone väljendavad võrdused (vt. joon 6.1):

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, kus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$, kui $\alpha \neq (2n+1)90°$.

Näide 2. Leiame $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui nurga lõpphaaral on punkt $M(0{,}9;\ -4)$. Et antud juhul

$r = \sqrt{0{,}9^2 + (-4)^2} = 4{,}1$,

siis $\sin \alpha = \frac{-4}{4{,}1} \approx -0{,}9756$, $\cos \alpha = \frac{0{,}9}{4{,}1} \approx 0{,}2195$ ja

$\tan \alpha = \frac{-4}{0{,}9} \approx -4{,}4444$.

Näide 3. Leiame $\cos \alpha$, kui nurga α lõpphaaral on vektor $\overrightarrow{OM} = (2{,}1;\ 2{,}5)$. Et nurga lõpphaaral on ka punkt $M(2{,}1;\ 2{,}5)$, siis

$r = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}5^2} \approx 3{,}2650$ ja $\cos \alpha = \frac{2{,}1}{3{,}265} \approx 0{,}6432$.

Kui vaadeldav nurk on teravnurk täisnurkses kolmnurgas (näteks α või β joonisel 6.2), siis

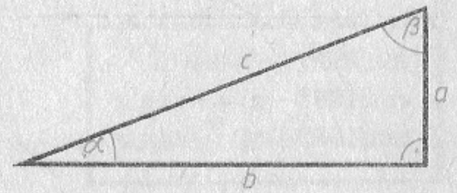
nurga siinus on võrdne vastaskaateti ja hüpotenuusi suhtega;
nurga koosinus on võrdne lähiskaateti ja hüpotenuusi suhtega;
nurga tangens on võrdne vastaskaateti ja lähiskaateti suhtega.

Joonise 6.2 tähistusi kasutades seega:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$;

$\sin \beta = \frac{b}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$, $\tan \beta = \frac{b}{a}$.

Näide 4. Leiame täisnurkse kolmnurga kaateti, kui selle vastasnurk on $30°$ ning kolmnurga hüpotenuus on 10 cm. Et antud kolmnurgas on $\sin 30° = \frac{a}{10}$, siis $a = 10 \cdot \sin 30° = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ (cm).



Joonis 6.2

6 Kaheksandas klassis õppisime veel tundma täiendusnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid

$$\begin{aligned}&\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)\\&\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)\\&\tan\alpha=\frac{1}{\tan(90^\circ-\alpha)}\end{aligned}\qquad(6.1)$$

Vning ühe ja sama nurga siinust, koosinust ja tangensit siduvaid valemeid

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\&\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\&1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\end{aligned}\qquad(6.2)$$

Näide 5. Lihtsustame avaldist $\sin\alpha\,(1+\tan^2\alpha)\cos(90^\circ-\alpha)+1$. Valemeid (6.1) ja (6.2) kasutades teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\sin\alpha\,(1+\tan^2\alpha)\cos(90^\circ-\alpha)+1=$$
$$=\sin\alpha\,\frac{1}{\cos^2\alpha}\sin\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Nagu teame, sõltub $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ väärtuse märk sellest, millise veerandi nurk on α. Vastav kokkuvõte on esitatud järgnevas tabelis:

	I veerand	II veerand	III veerand	IV veerand
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−

Kui nurk on teravnurk, siis saame siinuse, koosinuse ja tangensi väärtused leida vastavatest tabelitest või arvuti, näiteks *MKIII*-2 abil. Kui nurk ei ole teravnurk, siis ilma definitsiooni abita oskame siinuse, koosinuse ning tangensi väärtusi leida vaid esimese ja teise veerandi nurkade korral. Selleks taandame valemite

V
$$\begin{aligned}&\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha\\&\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha\end{aligned}\qquad(6.3)$$

ja

V
$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+n\cdot360^\circ)=\sin\alpha\\&\cos(\alpha+n\cdot360^\circ)=\cos\alpha\\&\tan(\alpha+n\cdot360^\circ)=\tan\alpha\end{aligned}\qquad(6.4)$$

seast sobivate abil nurga teravnurgaks ning kasutame siis jälle trigonomeetrilisi tabeleid või arvutit. Trigonomeetriliste funktsioonide[1] väärtuste leidmist ülejäänud nurkade korral vaatleme järgnevates artiklites.

Valemite (6.3) kasutamisel peame meeles, et võrduse parema poole ees olev märk «+» või «−» on sama, mis vastavalt siinuse, koosinuse või tangensi märk teise veerandi nurkade korral.

Näide 6. Leiame $\cos 855^\circ$. Kõigepealt kirjutame nurga 855° kujul $\alpha+n\cdot360^\circ$, et saaks rakendada valemeist (6.4) teist: $855^\circ=135^\circ+2\cdot360^\circ$. Selle valemi kohaselt $\cos 855^\circ=\cos(135^\circ+2\cdot360^\circ)=\cos 135^\circ$. Et nurk 135° on teise veerandi nurk, siis kirjutame selle kujul $180^\circ-\alpha$ ning rakendame valemeist (6.3) teist: $\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ$.

Et $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, siis kokkuvõttes $\cos 855^\circ=135^\circ=-\cos 45^\circ=$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Näide 7. Leiame teise veerandi nurga x nii, et $90^\circ<x<180^\circ$ ja $\tan x=-2{,}225$. Otsime teise veerandi nurka x kujul $180^\circ-\alpha$, kus $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Siis omandab võrdus $\tan x=-2{,}225$ kuju $\tan(180^\circ-\alpha)=-2{,}225$, millest $-\tan\alpha=-2{,}225$ ehk $\tan\alpha=2{,}225$. Tabelist leiame $\alpha=65^\circ48'$ ja seega $x=180^\circ-65^\circ48'=114^\circ12'$.

Valemid (6.3) tuletati VIII klassis küll eeldusel, et α on teravnurk, kuid tegelikult kehtivad need valemid mis tahes nurga α korral.

Näide 8. Ilmselt on $\tan(180^\circ-152^\circ)=\tan 28^\circ$. Kasutame nüüd $\tan(180^\circ-152^\circ)$ teisendamisel valemist (6.3) kolmandat, võttes $\alpha=152^\circ$, ning veendume, et saame sama tulemuse: $\tan(180^\circ-152^\circ)=-\tan 152^\circ=$
$=-\tan(180^\circ-28^\circ)=-(-\tan 28^\circ)=\tan 28^\circ$.

Ka valemid (6.4), nagu teame juba VIII klassist, kehtivad mis tahes nurga α korral. Seetõttu on vahel otstarbekohane kasutada neid valemeid n. ö. paremalt vasakule.

Näide 9. Leiame $\sin(-330^\circ)$ ja $\cos(-930^\circ)$. Esimesel juhul kasutame valemit $\sin\alpha=\sin(\alpha+n\cdot360^\circ)$, võttes $\alpha=-330^\circ$ ning $n=1$, et nurk

[1] Kaheksandas klassis märkisime, et nurga siinust, koosinust ning tangensit nimetame kokkuvõtvalt ka trigonomeetrilisteks funktsioonideks.

$-330° + n \cdot 360°$ tuleks võimalikult väike positiivne nurk. Seega $\sin(-330°) = \sin(-330° + 360°) = \sin 30° = 0{,}5$.

Teisel juhul on $\alpha = -930°$ ja et nurk $-930° + n \cdot 360°$ tuleks jällé võimalikult väike positiivne nurk, valime $n = 3$: $\cos(-930°) = \cos(-930° + 3 \cdot 360°) = \cos 150°$. Edasi rakendame valemist (6.3) teist: $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Valemid (6.4) võimaldavad taandada suvalise nurga siinuse, koosinuse ja tangensi leidmise 360°-st väiksema positiivse nurga sama trigonomeetrilise funktsiooni leidmisele. Seetõttu, rääkides mingi veerandi nurgast, mõtleme edaspidi selle all reeglina 360°-st väiksemat positiivset nurka.

A.

375. Leia definitsioonide põhjal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui nurga α lõpphaaral on võetud punkt M või vastavalt vektor $\overrightarrow{OM}$;

1) $M(-4;\ 3)$; 2) $\overrightarrow{OM} = (8;\ -6)$; 3) $M(10;\ 8)$;
4) $M(-7;\ -24)$; 5) $\overrightarrow{OM} = (-11;\ 7)$; 6) $M(1{,}5;\ 2{,}8)$;
7) $M(a;\ -a)$; 8) $\overrightarrow{OM} = (-2a;\ -a)$; 9) $M(-1{,}6;\ -0{,}78)$.

376. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 4 cm ja 10 cm. Arvuta mõlema teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

377. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 12 cm ning üks kaatet 9 cm. Arvuta mõlema teravnurga siinus, koosinus ja tangens.

378. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on 60° ja hüpotenuus 20 cm. Arvuta kolmnurga kaatetid.

379. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 30° ning selle lähiskaatet 5 cm. Arvuta kolmnurga ülejäänud küljed.

380. Leia

1) $\sin 26°$, kui on teada, et $\cos 64° = 0{,}4384$;
2) $\cos(90° - \alpha)$, kui $\sin\alpha = 0{,}8036$;
3) $\sin\alpha$, kui $\cos(90° - \alpha) = 0{,}0013$;
4) $\tan(90° - \alpha)$, kui $\tan\alpha = \sqrt{5}$;
5) $\tan\alpha$, kui $\tan(90° - \alpha) = 1\frac{3}{7}$.

381. Missuguse nurga siinus on sama suur kui $\cos 10°$, $\cos 79°$, $\cos 27°32'$?

382. Lihtsusta avaldis

1) $\cos\alpha : \sin\alpha \cdot \tan\alpha$;
2) $1 - \tan\alpha : \sin\alpha : \cos\alpha$;
3) $\frac{1}{1+\tan^2\alpha} + \sin^2\alpha$;
4) $\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} - 1$;
5) $(1+\sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cos\alpha$;
6) $\tan^2\alpha - \sin\alpha\tan\alpha(\tan\alpha - 1)(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

383. Lihtsusta avaldis

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha - \cos^2\alpha(\tan\alpha - 1)$;
2) $\cos\alpha(\sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha) + \sin^2\alpha : \cos^2\alpha$;
3) $\tan^2\alpha(1 + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha : \tan^2\alpha)$;
4) $[(\tan\alpha - 1)^2 + 2\tan\alpha]\sin^2\alpha$.

384. Lihtsusta avaldis

1) $1 + \tan 80° \cdot \frac{\sin 80°}{\cos 80°}$;
2) $\tan 20°(\cos 20° + 1) - \sin 20° : \cos 20°$;
3) $\sin^2 46° + \sin^2 44° + \tan^2 46°$;
4) $\sin 12° \tan 78° \cos 12° + \sin^2 12°$;
5) $\left(1 + \frac{1}{\tan^2 66°}\right)\cos^2 24°$.

385. Arvuta

1) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}2$;
2) $1 + \tan^2\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}8$;
3) $\sin\alpha$, kui $\cos\alpha = 0{,}4$ ja α on IV veerandi nurk;
4) $\cos\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}35$ ja α on II veerandi nurk;
5) $\tan\alpha$, kui $\cos\alpha = -0{,}7$ ja α on II veerandi nurk;
6) $\cos\alpha$, kui $\tan\alpha = -5$ ja α on IV veerandi nurk;
7) $\tan\alpha$, kui $\sin\alpha = 40{,}9$ ja α on I veerandi nurk.

386. Leia

1) $\sin 47°$; 2) $\cos 42°$; 3) $\tan 35°$;
4) $\sin 2°6'$; 5) $\cos 70°48'$; 6) $\tan 54°30'$;
7) $\sin 80°26'$; 8) $\cos 41°29'$; 9) $\tan 66°31'$;
10) $\sin 38°21'$; 11) $\cos 75°39'$; 12) $\tan 84°46'$;
13) $\sin 26'$; 14) $\cos 3°53'$; 15) $\tan 23°38'$.

387. Leia teravnurk α, kui

1) $\sin\alpha=0{,}7314$; 2) $\cos\alpha=0{,}9385$; 3) $\tan\alpha=0{,}3620$;
4) $\sin\alpha=0{,}1650$; 5) $\cos\alpha=0{,}8075$; 6) $\tan\alpha=2{,}289$;
7) $\sin\alpha=0{,}4198$; 8) $\cos\alpha=0{,}4$; 9) $\tan\alpha=1{,}2580$;
10) $\sin\alpha=0{,}0131$; 11) $\cos\alpha=0{,}9992$; 12) $\tan\alpha=4{,}48$;
13) $\sin\alpha=0{,}2539$; 14) $\cos\alpha=0{,}3354$; 15) $\tan\alpha=7{,}082$.

388. Leia

1) $\sin 120°$; 2) $\cos 135°$; 3) $\tan 150°$;
4) $\sin 103°$; 5) $\cos 173°$; 6) $\tan 138°$;
7) $\sin 126°6'$; 8) $\cos 131°54'$; 9) $\tan 162°48'$;
10) $\sin 176°17'$; 11) $\cos 170°32'$; 12) $\tan 111°15'$.

389. Leia

1) $\sin 750°$; 2) $\cos 420°$; 3) $\tan 1485°$;
4) $\sin 404°30'$; 5) $\cos 1106°36'$; 6) $\tan 368°18'$;
7) $\sin 1084°8'$; 8) $\cos 1472°15'$; 9) $\tan 800°43'$.

390. Leia

1) $\sin 1172°9'$; 2) $\cos 8750°17'$; 3) $\tan 500°50'$;
4) $\sin 1933°$; 5) $\cos 1188°34'$; 6) $\tan 459°18'$;
7) $\sin 1892°$; 8) $\cos 1255°4'$; 9) $\tan 480°$.

391. Leia teise veerandi nurk x, kui

1) $\sin x=0{,}8235$; 2) $\cos x=-0{,}5108$;
3) $\tan x=-0{,}1212$; 4) $\sin x=0{,}0251$;
5) $\cos x=-0{,}7626$; 6) $\tan x=-0{,}9989$;
7) $\sin x=0{,}6237$; 8) $\cos x=-0{,}2891$;
9) $\tan x=-1{,}7182$; 10) $\sin x=0{,}3025$;
11) $\cos x=-0{,}4272$; 12) $\tan x=-7{,}015$.

B.

392. Milliste täispöördest väiksemate positiivsete nurkade korral on nurk $48°+\alpha+n\cdot 360°$ 1) esimese; 2) teise; 3) kolmanda; 4) neljanda veerandi nurk?

393. Leia joonišelt 6.1 mõõtmise teel punkti M koordinaadid ning arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ väärtus. Kas need tulemused sõltuvad mõõtmisel kasutatud mõõtühikust?

394. Ühikvektor $\overrightarrow{OM}=(x;\ y)$ moodustab x-telje positiivse suunaga mingi nurga. Leia selle nurga siinus, koosinus ja tangens.

395. Arvesta eelmise ülesande tulemusi ning leia ühikvektori $\overrightarrow{OM}$ koordinaadid, kui vektor $\overrightarrow{OM}$ moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α.

396. Leia

1) $\sin(-315°)$; 2) $\cos(-330°)$; 3) $\tan(-300°)$;
4) $\sin(-284°)$; 5) $\cos(-317°)$; 6) $\tan(-345°)$;
7) $\sin(-570°)$; 8) $\cos(-995°)$; 9) $\tan(-936°)$.

6.1. KOLMANDA VEERANDI NURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Valemid (6.3) võimaldavad taandada teise veerandi nurkade siinuse, koosinuse ja tangensi leidmise esimese veerandi nurkade siinuse, koosinuse ja tangensi leidmisele. Vaatleme järgnevalt, kuidas saada analoogilisi valemeid kolmanda veerandi nurkade siinuse, koosinuse ning tangensi arvutamiseks.

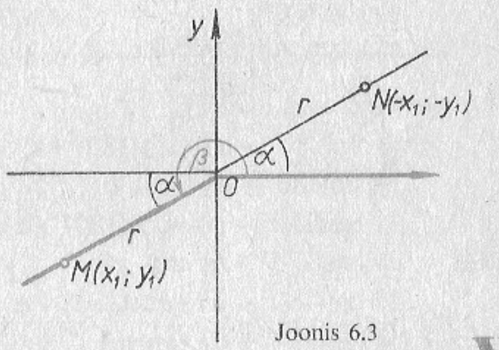
Kirjutame kolmanda veerandi nurga β ($180°<\beta<270°$) kujul $180°+\alpha$, kus $0°<\alpha<90°$.

Joonistame koordinaatteljestikku nurga β, märkides ühtlasi ära nurga α (joon. 6.3). Võtame nurga β lõpphaaral mingi punkti $M(x_1;\ y_1)$ ja tähistame OM tähega r. Peegeldame nüüd kiirt OM punkti O suhtes. Tulemusena saame kiire ON, mis moodustab x-teljega nurga α, kusjuures punkti M kujutiseks on $N(-x_1;\ -y_1)$ ning $ON=OM=r$. Nurga siinuse, koosinuse ja tangensi definitsioonide põhjal:

$$\sin\beta=\frac{y_1}{r}=-\frac{-y_1}{r}=-\sin\alpha,$$

$$\cos\beta=\frac{x_1}{r}=-\frac{-x_1}{r}=-\cos\alpha,$$

$$\tan\beta=\frac{y_1}{x_1}=\frac{-y_1}{-x_1}=\tan\alpha.$$



Joonis 6.3

Et $\beta=180°+\alpha$, siis

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha\\&\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha\\&\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha\end{aligned}} \qquad (6.5)$$

Need seosed võimaldavadki taandada kolmanda veerandi nurga $180°+\alpha$ siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamise esimese veerandi nurga α siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamisele.

Valemite (6.5) meelespidamiseks rõhutame, et märk võrduse parema poole ees ühtib vastavalt siinuse, koosinuse või tangensi märgiga kolmanda

veerandi nurkade korral. Valemid (6.5) tuletasime küll teravnurkse α korral, kuid need kehtivad ka suvalise nurga α korral.

Näide 1. Leiame sin 210° ja tan 920°. Esimesel juhul sin 210° = $=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-0{,}5$. Teisel juhul kasutame esmalt valemeist (6.4) kolmandat ning seejärel valemeist (6.5) kolmandat:
$\tan 920°=\tan(200°+2\cdot 360°)=\tan 200°=\tan(180°+20°)=\tan 20°=$
$=0{,}3640$.

Näide 2. Leiame väikseima positiivse kolmanda veerandi nurga x, mille korral $\cos x=-0{,}8988$. Selleks esitame otsitava kolmanda veerandi nurga x kujul $180°+\alpha$, kus $0°<\alpha<90°$. Nüüd saab võrdus $\cos x=-0{,}8988$ kuju $\cos(180°+\alpha)=-0{,}8988$, millest $-\cos\alpha=-0{,}8988$ ehk $\cos\alpha=0{,}8988$. Et $\alpha=26°$, siis $x=180°+26°=206°$.

A.

397. Leia
1) sin 210°; 2) cos 240°; 3) tan 225°;
4) sin 225°; 5) cos 210°; 6) tan 210°.

398. Leia
1) sin 187°46′; 2) cos 258°7′; 3) tan 203°28′;
4) sin 236°4′; 5) cos 190°12′; 6) tan 264°54′.

399. Leia
1) sin 1320°; 2) cos 1665°; 3) tan 2001°;
4) sin 908°; 5) cos 984°; 6) tan 600°;
7) sin 1264°18′; 8) cos 2047°5′; 9) tan 3825°36′.

400. Lihtsusta avaldis
1) $\sin(180°-\alpha)+\sin(180°+\alpha)$;
2) $\sin(180°+\alpha):\cos\alpha$;
3) $\cos(180°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)$;
4) $\cos(180°+\alpha)\tan\alpha$;
5) $\tan(180°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)$;
6) $\tan(180°+\alpha)\tan\alpha+1$.

401. Lihtsusta avaldis
1) $\tan 225°+\tan^2(180°+\alpha)$;
2) $\sin(90°-\alpha)\cos(180°+\alpha)+\sin(180°+\alpha)\sin\alpha$;
3) $\dfrac{-\sin\alpha+\sin 210°-\sin(180°+\alpha)}{\cos 240°+\sin(90°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)}$;
4) $\dfrac{\tan(180°+\alpha)\cos(180°-\alpha)-\sin(180°+\alpha)}{\sin(180°+\alpha)\cos(180°+\alpha)+\tan(180°-\alpha)}$.

402. Leia
1) $\sin(180°-\alpha)$ ja $\sin(180°+\alpha)$, kui $\sin\alpha=0{,}2$;
2) $\cos(180°-\alpha)$ ja $\cos(180°+\alpha)$, kui $\cos\alpha=0{,}044$;
3) $\tan(180°-\alpha)$ ja $\tan(180°+\alpha)$, kui $\tan\alpha=5$.

403. Leia kolmanda veerandi nurk $180°<x<270°$, kui
1) $\sin x=-0{,}1045$; 2) $\cos x=-0{,}1045$; 3) $\tan x=4{,}705$;
4) $\sin x=-0{,}6494$; 5) $\cos x=-0{,}7133$; 6) $\tan x=0{,}3$;
7) $\sin x=-0{,}4308$; 8) $\cos x=-0{,}9734$; 9) $\tan x=1{,}5837$.

6.2. NELJANDA VEERANDI NURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Kirjutame neljanda veerandi nurga $\beta(270°<\beta<360°)$ kujul $360°-\alpha$, kus $0°<\alpha<90°$.

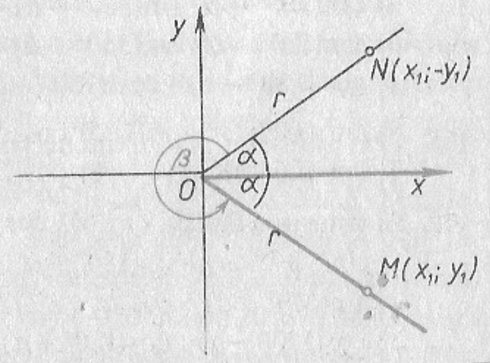
Joonestame koordinaatteljestikku nurga β, märkides ära ka nurga α (joon. 6.4). Võtame nurga β lõpphaaral mingi punkti $M(x_1; y_1)$ ja tähistame OM tähega r. Peegeldame nüüd kiirt OM x-telje suhtes. Tulemusena saame kiire ON, mis moodustab x-teljega nurga α, kusjuures punkti M kujutiseks on $N(x_1; -y_1)$ ning $ON=OM=r$. Nurga siinuse, koosinuse ja tangensi definitsioonide kohaselt:

$$\sin\beta=\frac{y_1}{r}=-\frac{-y_1}{r}=-\sin\alpha,$$

$$\cos\beta=\frac{x_1}{r}=\cos\alpha,$$

$$\tan\beta=\frac{y_1}{x_1}=-\frac{-y_1}{x_1}=-\tan\alpha.$$

Et $\beta=360°-\alpha$, siis



Joonis 6.4

sin(360° − α) = −sin α
cos(360° − α) = cos α
tan(360° − α) = −tan α (6.6)

Need seosed võimaldavad taandada neljanda veerandi nurga $360°-\alpha$ siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamise esimese veerandi nurga α siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamisele.

Valemite (6.6) meelespidamiseks rõhutame, et märk võrduse parema poole ees ühtib vastavalt siinuse, koosinuse või tangensi märgiga neljanda veerandi nurkade korral. Valemid (6.6) tuletasime teravnurkse α korral, kuid need kehtivad ka suvalise nurga α korral.

Näide 1. Leiame cos 1395°. Selleks kasutame valemeist (6.4) teist: cos 1395° = cos(315° + 3 · 360°) = cos 315°. Et nurk 315° on neljanda veerandi nurk, siis valemeist (6.6) teise põhjal cos 315° = cos (360° − 45°) = = cos 45° ehk cos 315° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Näide 2. Leiame nurga x, kui $270° < x < 360°$ ja cos $x = 0{,}3371$. Kirjutades nurga x kujul $360° - \alpha$, saame võrdusest cos $x = 0{,}3371$ võrduse cos$(360° - \alpha) = 0{,}3371$ ehk cos $\alpha = 0{,}3371$. Et $\alpha = 70°18'$, siis $x = 360° - 70°18' = 289°42'$.

A.

ü

404. Leia

1) sin 358°;	2) cos 274°;	3) tan 300°;
4) sin 397°14′;	5) cos 306°56′;	6) tan 325°30′;
7) sin 333°23′;	8) cos 270°55′;	9) tan 284°38′;
10) sin 2490°;	11) cos 678°8′;	12) tan 1259°;
13) sin 1020°;	14) cos 1720°;	15) tan 2152°.

405. Lihtsusta avaldis

1) sin(360° − α) sin(180° − α) + cos(180° + α) cos(360° − α);
2) tan(360° − α) sin(360° − α) − cos(180° − α);
3) tan(180° − α) tan(360° − α) + sin(360° − α) cos(90° − α);
4) sin²(360° − α) + cos²(180° − α) + tan²(360° − α).

406. Leia väikseim positiivne neljanda veerandi nurk x, kui

1) sin $x = -0{,}9361$;	2) cos $x = 0{,}91$;	3) tan $x = -0{,}9004$;
4) sin $x = -0{,}025$;	5) cos $x = 0{,}4$;	6) tan $x = -19{,}53$.

B.

407. Leia suurustest sin α, cos α ja tan α puuduvad, kui nurk α on neljanda veerandi nurk ning
1) tan $\alpha = -3{,}873$; 2) sin $\alpha = -0{,}8$; 3) cos $\alpha = 0{,}25$.

408. Leia suurustest sin α, cos α ja tan α puuduvad, kui nurk α on kolmanda veerandi nurk ning 1) sin $\alpha = -0{,}49$; 2) cos $\alpha = -0{,}604$; 3) tan $\alpha = 7$.

6.3. NEGATIIVSE NURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Leiame järgnevas valemid sin$(-\alpha)$, cos$(-\alpha)$ ja tan$(-\alpha)$ arvutamiseks, kui $\alpha > 0$.

Valemite (6.4) põhjal võime öelda, et siinuse, koosinuse ja tangensi väärtus ei muutu, kui nurgale liita või sellest lahutada täisarvkordne 360°. Lahutame valemite (6.6) vasakutes pooltes esinevast nurgast $360° - \alpha$ nurga 360°. Tulemusena saame seosed

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}} \qquad (6.7)$$

V

Need valemid võimaldavad taandada negatiivse nurga $-\alpha$ siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamise absoluutväärtuselt sama suure positiivse nurga α siinuse, koosinuse või vastavalt tangensi arvutamisele.

Näide 1. Leiame tan(−78°34′). Valemeist (6.7) kolmanda põhjal tan(−78°34′) = −tan 78°34′. Et tan 78°34′ = 4,945, siis tan(−78°34′) = = −4,945.

Näide 2. Leiame sin(−920°) kahel viisil. Kasutame esmalt valemist (6.7) esimest: sin(−920°) = −sin 920°. Valemeist (6.4) esimese põhjal on sin 920° = sin(200° + 2 · 360°) = sin 200° ning edasi valemeist (6.5) esimese põhjal sin 200° = sin(180° + 20°) = −sin 20°. Seega sin(−920°) = = −sin 920° = −sin 200° = −(−sin 20°) = sin 20° = 0,3420. Teise võimalusena liidame nurgale −920° nurga 3 · 360° ehk 1080°. Siis sin(−920°) = = sin(−920° + 1080°) = sin 160°. Edasi valemeist (6.3) esimese põhjal sin 160° = sin(180° − 20°) = sin 20° ning sin(−920°) = sin 20° = 0,3420. Nagu näha, osutub teine lahenduskäik mõnevõrra lühemaks.

A.

409. Leia

ü

1) sin(−30°);	2) cos(−60°);	3) tan(−45°);
4) sin(−45°);	5) cos(−30°);	6) tan(−60°);
7) sin(−80°);	8) cos(−76°);	9) tan(−88°);
10) sin(−46°24′);	11) cos(−10°36′);	12) tan(−59°48′);
13) sin(−12°14′);	14) cos(−87°9′);	15) tan(−77°47′).

410. Leia

1) $\sin(-103°9')$; 2) $\cos(-166°4')$; 3) $\tan(-152°2')$;
4) $\sin(-1105°)$; 5) $\cos(-801°)$; 6) $\tan(-1503°)$;
7) $\sin(-1532°)$; 8) $\cos(-1199°)$; 9) $\tan(-850°)$.

411. Leia

1) $\sin(-228°)$; 2) $\cos(-249°)$; 3) $\tan(-191°)$;
4) $\sin(-288°)$; 5) $\cos(-344°)$; 6) $\tan(-350°)$;
7) $\sin(-2100°)$; 8) $\cos(-907°)$; 9) $\tan(-700°)$.

412. Tõesta samasus

1) $\sin(\alpha-180°)=-\sin\alpha$;
2) $\cos(\alpha-180°)=-\cos\alpha$;
3) $\tan(\alpha-180°)=\tan\alpha$;
4) $\sin(180°-\alpha)+\sin(-\alpha)=0$.

413. Lihtsusta avaldis

1) $[\sin(-270°)-\sin(-90°)]\cdot[\cos 0°-\sin(-90°)]$;
2) $\dfrac{\cos(-\alpha)+3\cos 180°+\cos(180°-\alpha)}{\tan(-60°)-\cos(-120°)-\tan(-420°)}$;
3) $\sin(-\alpha)+\cos(-\alpha)+\sin(\alpha-180°)+\cos(\alpha-180°)$;
4) $\cos(-\alpha)\tan(\alpha-180°)-\tan(-\alpha):\cos(180°-\alpha)$.

414. Leia

1) $\sin(-\alpha)$, kui $\sin\alpha=0{,}77$;
2) $\tan(-\alpha)$, kui $\tan\alpha=3$;
3) $\cos(-\alpha)$, kui $\cos\alpha=0{,}08$;
4) $\tan\alpha$, kui $\tan(-\alpha)=-4$;
5) $\tan\alpha$, kui $\tan(-\alpha)=-10$;
6) $\cos\alpha$, kui $\cos(-\alpha)=0{,}3$;
7) $\sin\alpha$, kui $\sin(-\alpha)=0{,}21$.

B.

415. Leia näite 2 teise lahendusviisi eeskujul

1) $\sin(-272°)$; 2) $\cos(-325°)$; 3) $\tan(-300°42')$;
4) $\sin(-1060°)$; 5) $\cos(-1950°)$; 6) $\tan(-1490°)$;
7) $\sin(-270°)$; 8) $\cos(-360°)$; 9) $\tan(-720°)$.

416. Lihtsusta avaldis, kasutades näite 2 teises lahendusviisis rakendatud võtet:

1) $\cos(\alpha-180°)-\cos(\alpha-360°)$;
2) $\tan(\alpha-540°)\cos(\alpha-180°)$;
3) $\sin(\alpha-180°):\cos(\alpha-270°)+\tan(\alpha-180°)$.

6.4. TAANDAMISVALEMID

Valemeid (6.3) kuni (6.7) nimetatakse ühise nimetusega **taandamisvalemiteks**, sest nad võimaldavad mis tahes nurga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse leidmise taandada teravnurga juhule. Kõik valemid kehtivad sealjuures mitte ainult teravnurga α, vaid ka mis tahes nurga α korral.

Valemite (6.3), (6.5) ja (6.6) meeldejätmisest oli juba juttu, kuid märgime kokkuvõtvalt veel kord, et nende valemite korral ei muutu trigonomeetriline funktsioon ning võrduse parema poole ees olev märk ühtib vastava trigonomeetrilise funktsiooni märgiga selles veerandis, kuhu kuulub esialgne nurk, kui nurka α tõlgendada teravnurgana.

Näide 1. Lihtsustame kirjutist $\tan(180°-\alpha-\beta)$. Selleks kirjutame nurga $180°-\alpha-\beta$ kujul $180°-(\alpha+\beta)$. Siis $\tan[180°-(\alpha+\beta)]=-\tan(\alpha+\beta)$, sest tangens teise veerandi nurgast $180°-(\alpha+\beta)$ on negatiivne (nurga $\alpha+\beta$ loeme märgi määramisel teravnurgaks). Tähendab, $\tan(180°-\alpha-\beta)=-\tan(\alpha+\beta)$.

Tõestame, et iga $n\in\mathbf{Z}$ korral kehtib ka seos

$$\boxed{\tan(\alpha+n\cdot 180°)=\tan\alpha} \quad . \quad (6.8)$$

Vaatleme eraldi juhte, kui n on paarisarv ($n=2k$) ja kui n on paaritu arv ($n=2k+1$).

Kui $n=2k$, siis tuleb näidata, et $\tan(\alpha+2k\cdot 180°)=\tan\alpha$. Kuna $\tan(\alpha+2k\cdot 180°)=\tan(\alpha+k\cdot 360°)$, siis valemeist (6.4) kolmanda põhjal $\tan(\alpha+2k\cdot 180°)=\tan\alpha$, mis ütlebki, et seos (6.8) kehtib paarisarvulise n korral.

Kui $n=2k+1$, siis tuleb näidata, et $\tan[\alpha+(2k+1)180°]=\tan\alpha$. Teisendame võrduse vasakut poolt kõigepealt valemist (6.4) kolmanda põhjal: $\tan[\alpha+(2k+1)\cdot 180°]=\tan[(\alpha+180°)+k\cdot 360°]=\tan(\alpha+180°)$. Et valemeist (6.5) kolmanda põhjal $\tan(\alpha+180°)=\tan\alpha$, siis kokkuvõttes $\tan[\alpha+(2k+1)\cdot 180°]=\tan\alpha$, mis ütlebki, et seos (6.8) kehtib ka paaritu n korral.

A.

417. Leia

1) $\sin 83°$; 2) $\cos 45°20'$; 3) $\tan 25°16'$;
4) $\sin 171°12'$; 5) $\cos 91°$; 6) $\tan 175°6'$;
7) $\sin 203°47'$; 8) $\cos 256°32'$; 9) $\tan 182°52'$;
10) $\sin 346°$; 11) $\cos 281°55'$; 12) $\tan 318°17'$;

13) $\sin(-80°)$; 14) $\cos(-47°)$; 15) $\tan(-88°)$;
16) $\sin(-99°2')$; 17) $\cos(-100°)$; 18) $\tan(-163°)$;
19) $\sin(-245°)$; 20) $\cos(-186°)$; 21) $\tan(-248°)$;
22) $\sin(-291°)$; 23) $\cos(-318°)$; 24) $\tan(-350°)$;
25) $\sin 784°$; 26) $\cos 1000°$; 27) $\tan(-1884°)$;
28) $\sin(-4360°)$; 29) $\cos 834°$; 30) $\tan 2736°$;
31) $\sin 290°42'$; 32) $\tan 285°4'$; 33) $\tan 849°5'$.

418. Leia avaldise $\sin(\alpha-20°)+\cos(\alpha+280°)$ väärtus, kui
1) $\alpha=0°$; 2) $\alpha=20°$; 3) $\alpha=80°$; 4) $\alpha=133°$; 5) $\alpha=528°$.

419. Leia avaldise $2\sin\alpha+\cos 2\alpha-3\sin 3\alpha-4\cos 6\alpha$ väärtus, kui
1) $\alpha=0°$; 2) $\alpha=30°$; 3) $\alpha=-45°$; 4) $\alpha=360°$.

420. Leia avaldise väärtus trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid kasutamata:
1) $\cos 0°+\sin 270°-\cos 210°\ \tan 225°-\cos 90°-$
$-2\cos 135°+\sin 300°$;
2) $\cos(-390°)-\tan 300°+\tan 120°-\tan(-45°)$;
3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+3\cos 180°-\cos(360°-\alpha)}{\tan 60°-\cos 120°+\tan(-600°)}$;
4) $(a+b)\tan 225°+(a-b)\sin(-90°)+(a^2+b^2)\tan 900°-$
$-a\cos(-270°)$.

421. Lihtsusta avaldis
1) $2\cos 630°-0{,}5\tan(-180°)-\cos(-660°)+\sin 810°$;
2) $\sin 160°\cos 110°+\sin 250°\cos 340°+\tan 110°\tan 340°$;
3) $\dfrac{\tan 228°\tan 222°+\sin 155°\cos 245°}{\tan 73°\tan 197°+\tan 155°\tan 335°}$;
4) $\dfrac{\sin(90°-\alpha)\tan 132°\sin(-90°)\cos 312°}{\sin 222°\cos(180°+\alpha)\tan 42°\cos(-900°)}$.

422. Leia
1) vähim positiivne nurk x, kui $\sin x=-0{,}8736$;
2) vähim positiivne nurk x, kui $\tan x=-0{,}9792$;
3) vähim positiivne nürinurk x, kui $\sin x=0{,}1872$;
4) vähim positiivne nurk x, kui $\cos x=-0{,}7103$;
5) positiivne III veerandi nurk x, kui $\tan x=0{,}2572$;
6) positiivne II veerandi nurk x, kui $\sin x=0{,}4256$.

423. Lihtsusta avaldis
1) $[\tan(\alpha+540°)\cdot\tan(\alpha-540°)+1]\cos^2(360°-\alpha)$;
2) $\tan(\alpha+17\cdot 180°)-\tan(180°+\alpha)+\tan(\alpha-180°)$.

B.

424. Leia trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid kasutamata kolmnurga kolmanda nurga tangens ja siinus, kui $\tan(\alpha+\beta)=2\frac{1}{3}$.

425. Tõsta, et igas kolmnurgas
1) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$;
2) $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\tan\dfrac{\gamma}{2}=1$.

426. Tõesta, et iga α korral
1) $\sin(150°+\alpha)+\sin(\alpha-30°)=0$;
2) $\tan(45°+\alpha)\tan(45°-\alpha)=1$.

6.5. NURGA KRAADIMÕÕT

1. NURGA MÕÕTMINE

Varasemast teame, et nurka mõõdetakse **kraadides** (sümbol °) ja **minutites** (sümbol ′).

Kraad (1°) on $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Minut (1′) on $\frac{1}{60}$ kraadist.

Minutist väiksem mõõtühik on **sekund** (sümbol ″).

Sekund (1″) on $\frac{1}{60}$ minutist.

Järelikult $1°=60'$ ja $1'=60''$ ehk $1°=60'=3600''$.

Kui nurga suurus avaldub kraadides, minutites ja sekundites, siis kirjutatakse vastavad arvud koos mõõtühiku märgiga ükshteise järele. Olgu näiteks nurga α suurus 58 kraadi 25 minutit ja 18 sekundit. Seda kirjutatakse lühemalt $\alpha=58°25'18''$.

Positiivse nurga mõõtarv on positiivne ja negatiivse nurga mõõtarv on negatiivne. Seda väljendavad näiteks kirjutised $\alpha=58°25'18''$, $\beta=-34°11'10''$.

Näide 1. Teisendame nurga $45°20'23''$ sekunditeks ning nurga $-8435''$ kraadideks, minutiteks ja sekunditeks.

Nurga $45°20'23''$ teisendame sekunditeks järgmiselt:

$45°20'3'' = 45 \cdot 3600'' + 20 \cdot 60'' + 23'' = 163223''$. Kui kasutada taskuarvutit, on parem arvutada kujul $(45 \cdot 60 + 20) \cdot 60 + 23$, millele vastab arvutusskeem 45 [×] 60 [+] 20 [×] 60 [+] 23 [=] .

Teisel juhul sooritame vajalikud arvutused järgmiselt: $8435 : 60 = 140$, jääk 35, $140 : 60 = 2$, jääk 20. Seega $-8435'' = -2°20'35''$. Kui kasutame arvutit, on sobivam sooritada arvutused järgmiselt: $8435 : 3600 = 2$, jääk 1235; $1235 : 60 = 20$, jääk 35. Seega $-8435 = -2°20'35''$. Sellele vastab arvuti *MKШ*-2 korral arvutusskeem 8435 [*П*] [÷] 3600 [=] (2,...) 2 [×] 3600 [=] [+/−] [F] [*П*$^+$] [*ИП*] [÷] 60 [=] 20 [×] 60 [=] (20,...) [+/−] [F] [*П*$^+$] [*ИП*] (35) .

Nurga suurust on mõnikord tarvis väljendada ka kraadi murdosades, näiteks $\alpha = \left(\frac{3}{7}\right)°$, $\beta = 80{,}62°$, $\gamma = -0{,}56°$.

Näide 2. Teisendame nurga $8°26'42''$ kraadideks ning nurga $52{,}247°$ kraadideks, minutiteks ja sekunditeks.

Esimese nurga korral saame $8°26'42'' = 8° + \left(\frac{26}{60}\right)° + \left(\frac{42}{3600}\right)° = 8{,}445°$. Kui kasutada arvutit, siis on otstarbekohane sooritada arvutused kujul $(42 : 60 + 26) : 60 + 8$, millele vastab arvutusskeem 42 [÷] 60 [+] 26 [+] 60 [+] 8 [=] . Kui arvutil leidub klahv [° ′ ″] või [*D.MS*][1], siis tuleb see ülesanne lahendada vastavalt skeemi 8 [° ′ ″] 26 [° ′ ″] 42 [° ′ ″] või 8,2642 [*D.MS*] kohaselt.

Teise nurga korral toimime järgmiselt: $52{,}247° = 52° + 0{,}247 \cdot 60' = 52° + 14{,}82' = 52°14' + 0{,}82 \cdot 60'' = 52°14' + 49{,}2'' \approx 52°14'49''$. Kui kasutame arvutit, siis arvutame skeemi järgi 0,247 [×] 60 [−] (14,...) 14 [×] 60 [=] (49,2) . Vihikusse kirjutame aga arvutuse käigus saadud järjestikused täisarvud: $52°14'49''$. Kui arvutil on peale klahvi [*D.MS*] ka pöördtehte klahv [*INV*][2], siis arvutame skeemi järgi 52,247 [*INV*] [*D.MS*]. Tabloole tuleb nüüd 52,14492, mis tähendab $52°14'49{,}2''$.

Kui sin α, cos α või tan α väärtus leida arvuti abil, siis reeglina ei pea eelnevalt taandamisvalemeid kasutama (erandiks on arvutid *MKШ*-2 ja *Б*3-32). Seega arvutame sin α, cos α ja tan α väärtused tavaliselt järgmiselt: esitame nurga α kraadides ning kasutame arvutit vastavalt skeemile α [sin] , α [cos] või α [tg] (osal arvuteil on sümboli tg asemel sümbol tan). Arvutite *MKШ*-2 ja *Б*3-32 korral tuleb nurk kõigepealt taandada positiivseks teravnurgaks, esitada siis nurk kraadides ning arvutada vastavalt skeemidele α [F] [sin] , α [F] [cos] või α [F] [tg] .

[1] *D.MS* — see lühend tuleb ingliskeelsete sõnade esitähtedest: *degree* — kraad, *minute* — minut, *second* — sekund.

[2] *INV* — lühend ingliskeelsest sõnast *invert* — ümber pöörama.

A.

427. Arvuta
1) $14°35'20'' + 60°44'16'' + 130°54'5'' + 4°18''$;
2) $43°18' - 21°28' + 10°11'18'' + 38'44'' - 70°4'26''$;
3) $4 \cdot 15°11'55'' + 5 \cdot 20°42'12'' - 2 \cdot 34°31'45''$;
4) $48°30'14'' : 2 + 132°52'16'' - 3°4'40'' : 5$.

428. Teisenda 1) $5°10'17''$; 2) $22°41'52''$; 3) $-100°12'$ sekunditeks.

429. Teisenda 1) $7284''$; 2) $154088''$; 3) $-3527''$ kraadideks, minutiteks ja sekunditeks.

430. Teisenda 1) $47°48'36''$; 2) $-15°18'54''$ kraadideks.

431. Teisenda 1) $98{,}505°$; 2) $10{,}084°$ kraadideks, minutiteks ja sekunditeks.

432. Leia
1) $\sin 36°47'49''$; 2) $\cos 12°5'25''$; 3) $\tan(-25°50'')$;
4) $\sin 163°9'14''$; 5) $\cos 301°24'8''$; 6) $\tan 205°31'29''$.

B.

433. Teisenda sekunditeks
1) $9°15'10''$; 2) $105°5'$; 3) $-108°8''$; 4) $-74°$.

434. Teisenda kraadideks, minutiteks ja sekunditeks
1) $5884''$; 2) $436'278''$; 3) $-10\,000''$; 4) $-845''$.

435. Esita kraadides, minutites ja sekundites nurk
1) 22,8°; 2) 147,45°; 3) −4,72°; 4) −0,66°;
5) 5,09°; 6) 10,278°; 7) −17,3°; 8) −2,37°.

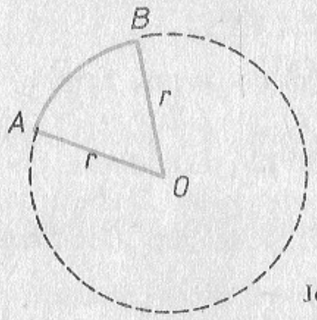
436. Esita nurk kraadides, tulemus ümarda kümnetuhandikeni:
1) $10°10'10''$; 2) $-6°6'6''$; 3) $4°45'$; 4) $-12'52''$;
5) $276°8'33''$; 6) $-8°41''$; 7) $1°11''$; 8) $-2'40''$.

437. Lahenda arvuti abil ülesanne 432. Võrdle tulemusi tabelitest saadud tulemustega.

2. SEKTORI PINDALA

Ringi sektoriks ehk lihtsalt **sektoriks** nimetatakse ringi osa, mida piiravad selle ringi kaks raadiust. Joonisel 6.5 on kujutatud kaks sektorit AOB — ühel kaar AB pideva joonega, teisel punktiiriga. Seame eesmärgiks leida sektori pindala raadiuse ja vastava kesknurga, nn. sektori nurga järgi.

Kui sektori nurk on antud kraadides, siis leitakse esmalt ühekraadise nurgaga sektori (ehk ühekraadise sektori) pindala S_1 ning seejärel vaadeldava sektori pindala S.



Joonis 6.5

Näide 3. Leiame kesknurgale 65°15′ vastava sektori pindala, kui raadius $r=8$ cm. Selleks esitame antud nurga kraadides: $65°15' = 65{,}25°$. Täispööre on 360° ja seega ühekraadise sektori pindala S_1 on 360 korda väiksem ringi pindalast:

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360} = \frac{64\pi}{360} = \frac{8\pi}{45} \text{ cm}^2.$$

Et antud sektori nurk on 65,25°, siis otsitav pindala

$$S = 65{,}25 \cdot S_1 = 65{,}25 \cdot \frac{8\pi}{45} = 11{,}6\pi \text{ cm}^2 \approx 36{,}4 \text{ cm}^2.$$

Kordame seda mõttekäiku üldjuhul. Kui sektori raadius on r, siis ühekraadise sektori pindala on

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360}$$

ning α-kraadise sektori pindala S on α korda suurem, s.t.

$$\boxed{S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}} \qquad (6.9)$$

A.

438. Arvuta sektori pindala, kui raadius on 6 cm ja nurk on
1) 30°; 2) 100°; 3) 88°30′; 4) 10°45′; 5) 250°.

439. Arvuta sektori pindala, kui nurk on 28°48′ ning raadius on
1) 5 cm; 2) 15 cm; 3) 1,5 m; 4) 10 m; 5) 105 m.

440. Arvuta sektori raadius, kui nurk on 81° ning pindala on
1) 36 π dm²; 2) 26244 π cm²; 3) 2916 m².

B.

441. Arvuta sektori pindala, kui raadius on 8 km ja nurk on
1) 8°6′30″; 2) 105°30′36″; 3) 243°12′55″.

442. Arvuta sektori pindala, kui nurk on 62°44′47″ ning raadius on
1) 5 km; 2) 14,8 km; 3) 384 400 km (Kuu keskmine kaugus Maast).

6.6. KAARE KRAADIMÕÕT

Selleks, et arvutada ringjoone kaare pikkust, võetakse kasutusele ringjoone **kaarekraadi, -minuti** ja **-sekundi** mõiste.

Kaarekraadiks (kaareminutiks, kaaresekundiks) nimetatakse ringjoone kaart, mis vastab kesknurgale üks kraad (üks minut, üks sekund).

Seega:

1) kaarekraad on $\frac{1}{360}$ ringjoonest;

2) kaarekraadide arv ringjoone kaares ja nurgakraadide arv vastavas kesknurgas on võrdsed;

3) erinevate raadiustega ringjoonte kaarekraadid on erineva pikkusega.

Näide 1. Kui ringjoone raadius $r=96$ cm, siis on ühe kaarekraadi pikkus $\frac{2\pi \cdot 96}{360}$ cm $\approx 1{,}68$ cm. Kui aga raadius $r=52$ cm, siis on ühe kaarekraadi pikkus $\frac{2\pi \cdot 52}{360}$ cm $\approx 0{,}91$ cm.

Näide 2. Kui ringjoone raadius on 10 km, siis on

1 kaarekraadi pikkus $\frac{2\pi \cdot 10}{360}$ km $\approx 0{,}174533$ km $= 174{,}533$ m,

1 kaareminuti pikkus $\frac{174{,}533}{60}$ m $\approx 2{,}9089$ m $= 290{,}89$ cm,

1 kaaresekundi pikkus $\frac{290{,}89}{60}$ cm $\approx 4{,}85$ cm.

Kui on antud ringjoone raadius r ning kaarekraadide arv α (vastav kesknurk kraadides), siis arvutatakse selle kaare pikkus järgmiselt: leitakse ühekraadise kaare pikkus ning seejärel α-kraadise kaare pikkus.

Näide 3. Leiame kaare pikkuse l, kui kaares on $67°44'42''$ ning $r=123{,}3$ cm. Kaarekraadi pikkus on antud juhul

$$\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi\cdot 123{,}3}{180}=\frac{137\pi}{200}\text{ cm}.$$

Et $67°44'42''\approx 67{,}745°$, siis antud kaare pikkus on kaarekraadist 67,745 korda suurem:

$$l=\frac{67{,}745\cdot 137\pi}{200}\approx 145{,}79\text{ cm}.$$

Kordame seda mõttekäiku üldjuhul. Kui ringjoone raadius on r, siis kaarekraadi pikkus on

$$\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$$

ning α-kraadise kaare pikkus l on α korda suurem, s. t.

$$\boxed{l=\frac{\pi r\alpha}{180}}. \qquad (6.10)$$

A.

ü **443.** Arvuta ringjoone kaare pikkus, kui raadius $r=90$ cm ja vastav kesknurk on
1) 46°; 2) 105°; 3) 54°12′; 4) 200°; 5) 36″.

444. Arvuta ringjoone kaare pikkus, kui kaares on $40°30'$ ja raadius r on
1) 4 cm; 2) 500 m; 3) 40 cm; 4) 100 m; 5) 360 m.

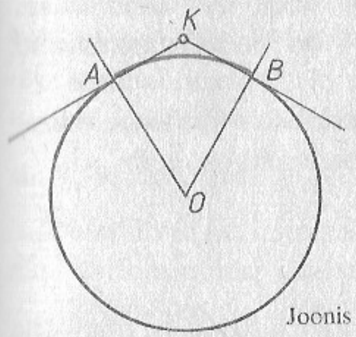
445. Arvuta kesknurgale α vastava kaare pikkus ning sektori pindala, kui
1) $r=12$ cm ja $\alpha=105°$; 2) $r=90$ cm ja $\alpha=60°$;
3) $r=16$ m ja $\alpha=72°$; 4) $r=24$ cm ja $\alpha=15°$.

446. Sektori raadius on r ning vastava kaare pikkus on l. Arvuta sektori pindala, kui
1) $r=10$ cm ja $l=12$ cm; 2) $r=0{,}84$ m ja $l=2$ m;
3) $r=50$ cm ja $l=44$ cm; 4) $r=15{,}7$ m ja $l=20$ m.

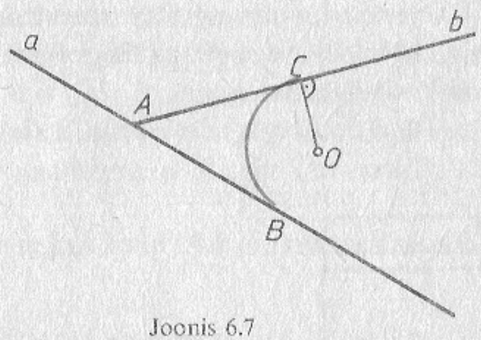
B.

447. Arvuta ringjoone kaare pikkus ja vastava sektori pindala, kui
1) $r=24{,}5$ cm ja $\alpha=270°$; 2) $r=208$ m ja $\alpha=92°6'40''$;
3) $r=1$ km ja $\alpha=11°16'38''$; 4) $r=0{,}64$ m ja $\alpha=72°32'30''$.

448. Kuu on Maast keskmiselt 384 400 km kaugusel. Arvuta Kuu liikumise kaarekraadi, -minuti ja -sekundi pikkus eeldusel, et Kuu liigub ümber Maa mööda ringjoont. Võrdle kaarekraadi pikkust Kuu läbimõõduga 3476 km.



Joonis 6.6



Joonis 6.7

449. Leia suurim vahemaa Maal (kaar AB joonisel 6.6), mida kosmonaut J. Gagarin 12. aprillil 1961. a. nägi, lennates kosmoselaeval «Vostok» maksimaalsel kaugusel (327 km) Maast. Maa raadiuseks võta 6378 km.

450. Maanteed a ja b (joon. 6.7) lõikuvad punktis A 50°-se nurga all. Lisaks ehitati ringjoone kaare kujuline tee (kaar BC), mis ühendab punkte B ja C. Mitme meetri võrra on uus tee (kaar BC) lühem endisest teest (BAC), kui kaare BC raadius OC on 200 m?

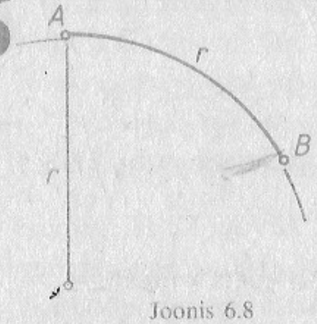
6.7. KAARERADIAAN

Lisaks kaarekraadi, -minuti ja -sekundi mõistele kasutatakse ka **kaareradiaani** mõistet.

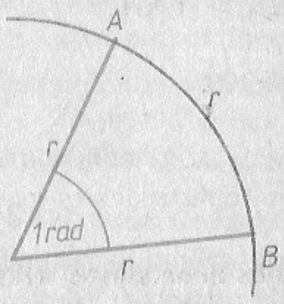
Kaareradiaaniks nimetatakse raadiuse pikkust ringjoone kaart (kaar AB, joon. 6.8). Seega:

m 1) iga ringjoon sisaldab $2\pi r : r=2\pi\approx 6{,}2832$ kaareradiaani;

2) erinevate raadiustega ringjoonte kaareradiaanide pikkused on erinevad.



Joonis 6.8



Joonis 6.9

Näide 1. Kui ringjoone raadius $r=10$ cm, siis ringjoone kaareradiaani pikkus on 10 cm, kui aga ringjoone raadius on 4,7 cm, on ka kaareradiaani pikkus 4,7 cm.

Olgu ringjoone raadius r ja kaares x kaareradiaani. Siis ühe kaareradiaani pikkus on r ning x kaareradiaani sisaldava kaare pikkus on xr, s. t.

V $\boxed{l=x\cdot r}$. (6.11)

Näide 2. Kui ringjoone kaar sisaldab 2,8 kaareradiaani ja ringjoone raadius on 5 cm, siis selle kaare pikkus on $2{,}8\cdot 5=14$ cm.

A.

ü 451. Leia kaareradiaani pikkus, kui ringjoone raadius on
1) 6 cm; 2) 2,8 cm; 3) 16 mm; 4) 1 m; 5) 4,85 m; 6) 25 km.

452. Leia ringjoone raadius, kui kaareradiaani pikkus on
1) 48 cm; 2) 3,2 m; 3) 5,9 m; 4) 10 cm; 5) 4,59 cm.

453. Ringjoone kaar sisaldab 0,42 kaareradiaani. Leia selle kaare pikkus, kui ringjoone raadius on 1) 5 cm; 2) 11 cm; 3) 0,5 m; 4) 1,03 m.

454. Arvuta ringjoone kaare pikkus, kui raadius $r=90$ cm ja kaares on kaareradiaane 1) 5; 2) 6; 3) 2,5; 4) 1,085; 5) 0,874.

6.8. NURGARADIAAN

1. RADIAANMÕÕT

Kõrvuti nurga kraadimõõduga kasutatakse ka radiaanmõõtu, milles mõõtühikuks on **radiaan** ehk **nurgaradiaan.**

Radiaaniks nimetatakse sellist kesknurka, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele (kaareradiaanile).

m

Radiaani tähistatakse sümboliga rad, mida võib ka nurga suurust väljendava arvu järel kirjutamata jätta, kui see ei tekita arusaamatusi. Nii näiteks kirjutatakse $\alpha=1{,}75$ rad, kuid ka $\alpha=1{,}75$. Trigonomeetriliste funktsioonide korral jätame sümboli rad alati kirjutamata. Näiteks kirjutame $\sin 1{,}75$, $\cos\frac{\pi}{3}$ jne.

Nurk 1 rad on kujutatud joonisel 6.9, kus kaare AB pikkus on r. Radiaani definitsioonist järeldub, et:

1) täispööre on 2π rad $\approx 6{,}2832$ rad;

2) kaareradiaanide arv ringjoone kaares ja nurgaradiaanide arv vastavas kesknurgas on võrdsed.

Esimesest järeldusest tuleneb, et $360°=2\pi$ rad ehk

$180°=\pi$ rad . (6.12) V

Seosest (6.12) saame:

$$1\text{ rad}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44{,}8''.$$

$$1°=\frac{\pi}{180°}\text{ rad}\approx 0{,}017453\text{ rad}.$$

Näide 1. Avaldame nurgad $-72°$ ja $16°52'30''$ radiaanmõõdus.

Et $1°=\frac{\pi}{180°}$ rad, siis

$$-72°=-72\cdot\frac{\pi}{180°}\text{ rad}=-\frac{2\pi}{5}\text{ rad}\approx -1{,}257\text{ rad}.$$

Teise nurga korral toimime järgmiselt:

$$16°52'30''=16°+\left(\frac{52}{60}\right)°+\left(\frac{30}{3600}\right)°=\left(\frac{135}{8}\right)°,$$

$$16°52'30''=\frac{135}{8}\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad}=\frac{3\pi}{32}\text{ rad}\approx 0{,}29452\text{ rad}.$$

Näites esitatud arvutused lihtsustuvad oluliselt taskuarvuti olemasolu korral (vt. artikli 6.5 näide 2). Osal arvuteist on niisuguste arvutuste tarvis olemas ka spetsiaalne klahv [Г→P] [1].

Et sageli esitatakse nurga suurus radiaanmõõdus arvu π kaudu, siis võib eelmise näite vastused kirjutada ka kujul:

$$-72° = -\frac{2\pi}{5} \text{ rad}; \qquad 16°52'30'' = \frac{3\pi}{32} \text{ rad}.$$

Ühe ja sama nurga avaldisse ei kirjutata segamini kraadimõõte ja radiaane. Seega tuleb kirjutada

kas $16°52'30'' + n \cdot 180°$ või $\frac{3\pi}{32} + n\pi$.

Näide 2. Avaldame nurga 1,8 rad kraadimõõdus. Et

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}, \text{ siis}$$

$$1{,}8 \text{ rad} = 1{,}8 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 103{,}1324° \approx 103°7'57''.$$

Kraadimõõdu teisendamine radiaanmõõduks ja vastupidi on hõlpsam, kui kasutada V. Bradise tabeleid XI. Nimetatud tabelite kasutamise tehnika on sama, mis nurga siinuste ja tangensite tabelite (VIII, IX, X) korral.

Näide 3. Avaldame nurga 54°26′ radiaanmõõdus ja nurga 1,2038 rad kraadimõõdus. Tabelist leiame $54°26' = 54°24' + 2' = 0{,}9495$ rad + $+0{,}0006$ rad $= 0{,}9501$ rad (kahele minutile vastava radiaanide arvu 0,0006 saime vastavast paranduste veerust).

Nurka 1,2038 rad tabelis ei leidu. Sellele lähim tabelis esinev väärtus on 1,2043, millele vastab kraadimõõt 69°. Et viga on praegu $1{,}2043 - 1{,}2038 = 0{,}0005$ rad, kuid sobivaimaks paranduseks on tabelis 0,0006 rad, millele vastab 2′, siis 1,2038 rad = 1,2043 rad − 0,0005 rad = 69° − 2′ = 68°58′.

Radiaanides väljendatud nurga siinuse, koosinuse ja tangensi väärtusi saab leida kolmel viisil: selleks võib

1) teisendada radiaanmõõdus antud nurk kraadimõõtu ning kasutada V. Bradise vastavaid tabeleid VIII, IX, X;

2) kasutada tabelit XII, kus on esitatud radiaanides väljendatud nurga siinuse, koosinuse ja tangensi väärtused;

3) kasutada taskuarvutit, lülitades selle radiaanides arvutamise režiimi (lüliti või klahv lühendiga *P*, *РаД*, *R* või *RAD*), sisestades nurga radiaanides ning leides vastavalt siinuse, koosinuse või tangensi väärtuse.

[1] Г — lühend venekeelsest sõnast градус — kraad,
P — lühend venekeelsest sõnast радиан — radiaan.

Näide 4. Leiame kolmel erineval viisil sin 1,02.

1) et 1,02 rad ≈ 58°27′, siis $\sin 1{,}02 = \sin 58°27' = 0{,}8526 - 0{,}0005 = 0{,}8521$.

2) V. Bradise tabelist XII otsime nurga väärtuste veerust (märgitud tähega *x*) arvu 1,02 ja leiame naaberveerust, et $\sin 1{,}02 = 0{,}8521$.

3) arvutit *MKIII*-2 kasutame skeemi [P] 1,02 [F] [sin] kohaselt.

Näide 5. Leiame kolmel erineval viisil nurga *x* radiaanides, kui $\cos x = 0{,}2575$.

1) tabelist VIII leiame, et $x = 75°5'$, mille teisendame radiaanmõõtu: $x = 1{,}3105$.

2) et tabelis XII on koosinuse antud väärtusele 0,2575 lähim väärtus 0,2579, siis leiame, et $x = 1{,}31$.

3) arvuti *MKIII*-2 abil saame skeemi [P] 0,2575 [F] [cos⁻¹] kohaselt, et $x = 1{,}3104$.

Taandamisvalemite käsitlemisel me kasutasime ainult nurkade kraadimõõtu. Kui nurki mõõta radiaanides, siis tuleb nendes valemites teha vastavad muudatused. Nii näiteks omandavad siinusega seotud taandamisvalemid radiaanmõõdu korral kuju

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,
$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin \alpha$,
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.

Kirjuta radiaanmõõdu tarvis ka ülejäänud taandamisvalemid.

A.

455. Esita radiaanmõõdus (ümardades tulemuse tuhandikeni) nurk, mis kraadimõõdus on

1) 36°;	2) 36°10′;	3) −66°12′;
4) 66°;	5) 40°12′18″;	6) −75°;
7) 8,5°;	8) 225°36″;	9) −57°17′45″;
10) 400°;	11) 50′48″;	12) −783°.

456. Esita arvu π abil radiaanmõõdus nurk, mis kraadimõõdus on

1) 0°;	2) 30°;	3) 45°;	4) 60°;	5) 90°;
6) 180°;	7) 270°;	8) 360°;	9) −30°;	10) −45°;
11) −60°;	12) −90°;	13) −180°;	14) −270°;	15) −360°.

457. Esita arvu π abil radiaanmõõdus nurk, mis kraadimõõdus on

1) 12°;	2) 75°;	3) 135°;	4) −46°;	5) −42,5°;
6) 40°;	7) 28°;	8) 240°;	9) −98°;	10) 93,06°.

458. Esita kraadimõõdus nurk, mis radiaanmõõdus on

1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$;

5) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{6}$; 7) $\frac{\pi}{5}$; 8) $\frac{2\pi}{3}$;

9) $\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{3\pi}{5}$; 11) $-\frac{\pi}{6}$; 12) $-\frac{\pi}{3}$;

13) $\frac{2\pi}{15}$; 14) $-\frac{\pi}{100}$; 15) $-\frac{7\pi}{36}$; 16) $\frac{10\pi}{3}$.

459. Esitada kraadimõõdus nurk, mis radiaanmõõdus on

1) 2 rad; 2) 0,08 rad; 3) $-3{,}14$ rad;
4) 0,75 rad; 5) 1,58 rad; 6) $-6{,}4$ rad;
7) 10,5 rad; 8) 0,62 rad; 9) $-0{,}6$ rad.

460. Leia

1) $\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\frac{\pi}{10}$; 3) $\sin 1{,}5$;

4) $\sin 1{,}21$; 5) $\cos\frac{\pi}{3}$; 6) $\cos\frac{2\pi}{9}$;

7) $\cos 0{,}01$; 8) $\cos 1{,}65$; 9) $\tan\frac{\pi}{4}$;

10) $\tan\frac{2\pi}{5}$; 11) $\tan 0{,}4$; 12) $\tan 0{,}08$;

13) $\sin\pi$; 14) $\cos\frac{4\pi}{15}$; 15) $\tan 1{,}3$;

16) $\sin 3{,}15$; 17) $\tan\pi$; 18) $\tan\pi$;

19) $\sin 3$; 20) $\cos 2$; 21) $\tan 5$.

461. Arvuta

1) $\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}+\tan\frac{\pi}{4}\right):\left(\sin\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\right):\left(\tan\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\sin^2\frac{\pi}{25}+\cos^2\frac{\pi}{25}$;

4) $\cos\frac{2\pi}{15}\left(1+\tan\frac{2\pi}{15}\right)$;

5) $\sin\frac{\pi}{8}:\cos\frac{\pi}{8}$;

6) $\sin^2\frac{7\pi}{30}\left(1+\tan^2\frac{4\pi}{15}\right)$.

462. Leia

1) $\sin^2 0{,}82+2{,}3+\cos^2 0{,}82$;
2) $\sin^2 1{,}4(1+\tan^2 1{,}4)$;
3) $\sin 0{,}3\tan 0{,}3+\cos 0{,}3$;
4) $(1+\tan^2 0{,}9)\cos 0{,}9$.

B.

463. Esita radiaanmõõdus nurk, mis kraadimõõdus on

1) 4°; 2) 14°18′; 3) 25°37′; 4) $-50°42'$
5) 80°; 6) 76°6′; 7) 48°15′; 8) $-22°32'$;
9) 86°; 10) 63°36′; 11) 39°26′; 12) $-48°42'$.

464. Esita radiaanmõõdus (täpsusega 10^{-6}) nurk, mis kraadimõõdus on

1) 3″; 2) 4′; 3) 1′1″; 4) $-6'10''$; 5) $-12'13''$.

465. Esita kraadimõõdus nurk, mis radiaanmõõdus on

1) 0,192 rad; 2) 0,4108 rad; 3) $-1{,}3012$ rad;
4) 0,5009 rad; 5) 1,479 rad; 6) $-0{,}7777$ rad;
7) 1,0018 rad; 8) 0,583 rad; 9) $-0{,}0038$ rad;
10) 4 rad; 11) 7,56 rad; 12) $-16{,}07$ rad.

466. Kolmnurga kaks nurka on 0,86 rad ja 1,45 rad. Leia selle kolmnurga kolmas nurk radiaanides.

467. Leia kolmnurga nurgad radiaanides, kui nad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4.

468. Leia

1) $\sin\frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}$; 3) $\tan\frac{5\pi}{6}$;

4) $\tan\frac{11\pi}{12}$; 5) $\sin\frac{7\pi}{12}$; 6) $\cos\frac{3\pi}{5}$;

7) $\cos\frac{13\pi}{18}$; 8) $\tan\frac{23\pi}{24}$; 9) $\sin\frac{27\pi}{32}$;

10) $\sin\frac{7\pi}{3}$; 11) $\cos\frac{25\pi}{6}$; 12) $\tan\frac{25\pi}{4}$;

13) $\tan\frac{53\pi}{12}$; 14) $\sin\frac{20\pi}{9}$; 15) $\cos\frac{51\pi}{8}$.

469. Kumb on suurem, kas

1) $\sin 1$ või $\cos 1$?
2) $\tan 1$ või $\tan 2$?
3) $\sin 1$ või 1?
4) $\sin 1$ või $\sin 3$?

470. Elektrimootori ajamiratas teeb 12 000 pööret minutis. Väljenda selle ratta nurkkiirus radiaanides sekundis.

471. Lihvimisketta nurkkiirus on 4500 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb lihvimisketas minutis?

472. Leia kella sekundiosuti, minutiosuti ja tunniosuti nurkkiirus radiaanides minutis.

2. SEKTORI PINDALA

Olgu sektori nurk x radiaani ja raadius r. Sektori pindala leidmisel arvutame esmalt üheradiaanise nurgaga sektori pindala ning seejärel x-radiaanise nurgaga sektori pindala S. Neist esimene pindala on $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$ ning teine pindala $x \cdot \frac{r^2}{2}$, s. t.

V $$\boxed{S = \frac{xr^2}{2}} \quad . \qquad (6.13)$$

Näide 6. Leiame sektori pindala, kui sektori nurk on $x = 0{,}8$ rad ja raadius $r = 5$ cm. Valemi (6.13) kohaselt

$$S = \frac{xr^2}{2} = \frac{0{,}8 \cdot 25}{2} = 10 \text{ cm}^2.$$

Sektori pindala võib avaldada ka kaare pikkuse kaudu. Selleks sooritame viimases valemis asenduse $l = xr$, millega saame valemi

V $$\boxed{S = \frac{rl}{2}} \quad . \qquad (6.14)$$

Näide 7. Leiame sektori pindala, kui sektori raadius on 8 cm ja kaare pikkus 10 cm. Valemi (6.14) põhjal

$$S = \frac{8 \cdot 10}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

A.

ü **473.** Arvuta sektori pindala, kui raadius on 6 cm ja nurk on

1) 30°; 2) 100°; 3) 30°15′; 4) 2°8′24″;
5) 4; 6) 0,3; 7) 0,011; 8) 1,5;
9) $\frac{\pi}{9}$; 10) $\frac{7\pi}{18}$; 11) $\frac{4\pi}{5}$; 12) $\frac{\pi}{4}$.

474. Täida tabel, kus α, r, l ja S on vastavalt sektori nurk, raadius, kaare pikkus ja pindala:

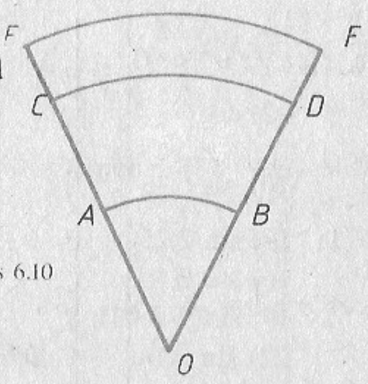
Nr.	α	r	l	S
1.	240°	4		
2.		8	3,84	
3.	18°			31,4
4.	1,2			15
5.	48°	12		
6.	0,52		2,6	

B.

475. Leia sektori kaare pikkus, kui sektori ümbermõõt on 3,1 r ning sektori pindala on 4,95 cm².

476. Leia sektori kaare pikkus, kui sektori ümbermõõt on 6 cm ning sektori pindala on 3 cm².

477. Mõõda jooniselt 6.10 vajalikud suurused ja arvuta
1) sektori OAB, OCD, OEF pindala;
2) kaare AB, CD, EF pikkus.



Joonis 6.10

KORDAMINE

A.

478. Leia

1) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 3) $\tan\frac{7\pi}{6}$;
4) $\sin\frac{11\pi}{9}$; 5) $\cos\frac{17\pi}{12}$; 6) $\tan\frac{39\pi}{32}$;
7) $\sin\left(-\frac{23\pi}{18}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$; 9) $\tan\frac{27\pi}{8}$.

479. Leia

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
4) $\sin(-\pi)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\tan(-2\pi)$;

7) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; 8) $\cos(-2\pi)$; 9) $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

480. Leia

1) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$; 6) $\tan\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$;

7) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{74\pi}{9}\right)$; 9) $\tan\left(-\frac{69\pi}{8}\right)$.

481. Leia

1) $\sin(-0{,}26)$; 2) $\cos(-0{,}16)$; 3) $\tan(-0{,}26)$;
4) $\sin(-1{,}64)$; 5) $\cos(-1{,}7)$; 6) $\tan(-1{,}58)$;
7) $\sin(-1)$; 8) $\cos(-1{,}06)$; 9) $\tan(-2{,}1)$.

482. Leia

1) $\sin\frac{5\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{7\pi}{3}$; 3) $\tan\frac{9\pi}{5}$;

4) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 5) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 6) $\tan\frac{12\pi}{11}$;

7) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$; 9) $\tan(-20\pi)$;

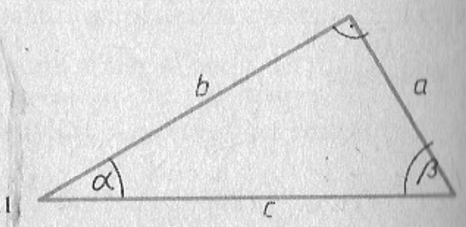
10) $\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$; 11) $\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)$; 12) $\tan\left(-\frac{45\pi}{8}\right)$;

13) $\sin 2{,}25$; 14) $\cos 1{,}7$; 15) $\tan 1{,}4$;
16) $\sin 6{,}5$; 17) $\cos 5{,}4$; 18) $\tan 10$;
19) $\sin(-8{,}03)$; 20) $\cos(-7{,}1)$; 21) $\tan(-4)$;
22) $\sin 3{,}14$; 23) $\cos 6{,}38$; 24) $\tan 1{,}57$.

483. Arvuta ringjoone kaare pikus ning sektori pindala, kui raadius $r=90$ cm ja vastav kesknurk on

1) $60°$; 2) $200°$; 3) $49°30'$; 4) $10°34'12''$;
5) 2,5; 6) 6; 7) 0,03; 8) 1,08;
9) $\frac{\pi}{15}$; 10) $\frac{5\pi}{9}$; 11) $\frac{\pi}{2}$; 12) $\frac{\pi}{18}$.

484. Avalda täisnurkse kolmnurga (joon. 6.11) nurkade α ja β siinus, koosinus ning tangens kolmnurga külgede kaudu.



Joonis 6.11

485. Mida tähendab väljend «lahenda täisnurkne kolmnurk»?

486. Milliste andmete korral on täisnurkne kolmnurk lahendatav?

487. Lahenda täisnurkne kolmnurk (joon. 6.11) ning leia pindala, kui

1) $\beta=47°44'$ ja $b=100$ cm;
2) $\beta=47°44'$ ja $a=5$ cm;
3) $\alpha=11°32'$ ja $c=3{,}5$ m;
4) $\alpha=46°53'$ ja $a=2$ cm;
5) $a=8$ cm ja $b=5$ cm;
6) $b=7$ cm ja $c=10$ cm;
7) $\alpha=5°32'45''$ ja $b=6{,}5$ m;
8) $\beta=58'33''$ ja $a=60$ m;
9) $\alpha=\frac{\pi}{60}$ ja $a=4$ cm;
10) $\beta=\frac{\pi}{3}$ ja $c=16$ cm;
11) $\beta=\frac{7\pi}{15}$ ja $a=5$ cm;
12) $\alpha=\frac{2\pi}{13}$ ja $c=20$ cm;
13) $\alpha=0{,}79$ ja $b=10$ cm;
14) $\alpha=0{,}3$ ja $a=5$ cm.

488. Tõesta, et täisnurkses kolmnurgas

1) $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$;
2) $\sin^2\alpha\tan^2\beta+\sin^2\beta\tan^2\alpha=1$.

489. Mida tähendab väljend «lahenda kolmnurk»?

490. Milliste andmete korral on kolmnurk lahendatav?

491. Sõnasta siinusteoreem ja kirjuta see võrdustena.

492. Väljenda koosinusteoreem võrdustena, sõnasta see teoreem.

493. Millal tuleb kolmnurkade lahendamisel kasutada siinusteoreemi, millal koosinusteoreemi?

494. Lahenda kolmnurk ning leia pindala, kui

1) $b=2{,}53$, $\beta=30°24'$ ja $\gamma=71°48'$;
2) $a=6{,}5$, $\beta=36°54'$ ja $\gamma=54°6'$;
3) $a=10$, $b=8$ ja $\alpha=66°12'$;
4) $a=4{,}2$, $\alpha=59°40'$ ja $\beta=30°40'$;
5) $b=4$, $c=2$ ja $\gamma=30°$;

6) $b=5$, $c=4$ ja $\alpha=48°19'$;
7) $a=10$, $c=5$ ja $\beta=76°42'$;
8) $a=7$, $b=3$ ja $c=6$;
9) $a=8$; $b=6$ ja $c=10$;
10) $a=1{,}3$, $b=2{,}5$ ja $c=2{,}1$.

B.

495. Leia kolmnurga nurga α poolitaja, küljele a tõmmatud mediaani ning kõrguse pikkus, kui $c=20$ cm, $\alpha=70°$ ja $\beta=28°$.

496. Leia kolmnurga siseringjoone raadius, kui $c=6{,}25$, $\alpha=83°20'$ ja $\beta=39°36'$.

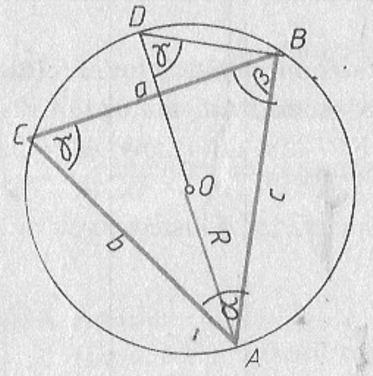
497. Kolmnurga ABC nurgad ja küljed on vastavalt α, β, γ ja a, b, c. Kasutades joonist 6.12 tõestada, et

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

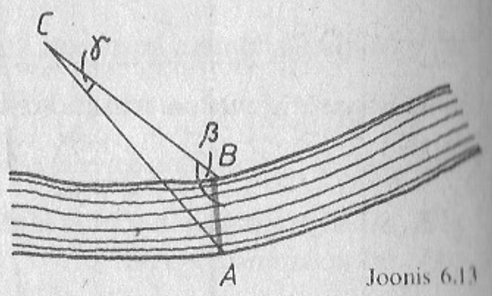
498. Arvuta eelmises ülesandes esitatud seoste põhjal kolmnurga ümberringjoone raadius, kui $b=10{,}1$ ja $\beta=53°54'$.

499. Üle jõe (joon 6.13) kavatsetakse ehitada sild AB. Arvuta silla pikkus, kui baas $BC=165$ m, $\beta=108°$, $\gamma=20°$.

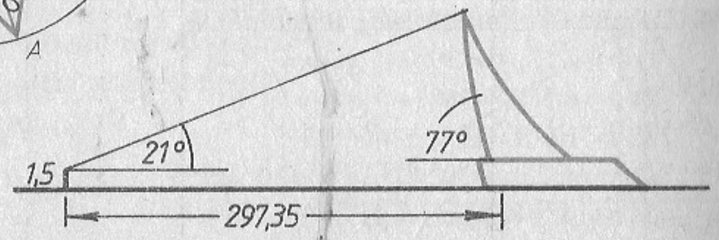
500. Moskvas avati 1964. a. monument kosmosealistajatele (joon. 6.14). Leia monumendi kõrgus, kui monumendist 279,35 m kaugusel ja 1,5 m kõrgusel mõõdetud horisontaali ning monumendi tipu vaheline nurk on 21°. Monumendi esiserva kalle horisondi suhtes on 77°.



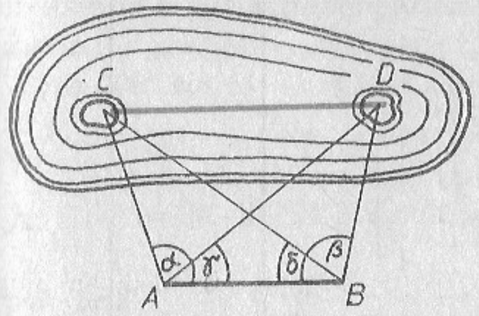
Joonis 6.12



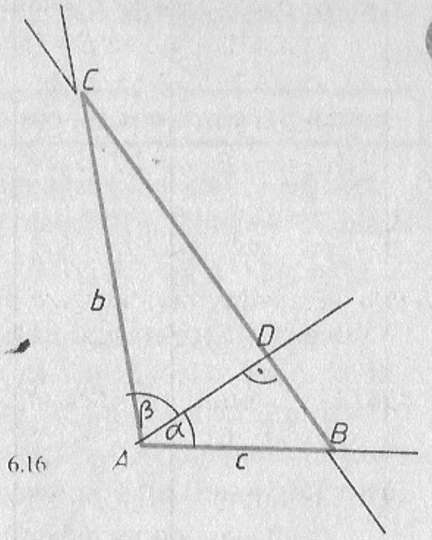
Joonis 6.13



Joonis 6.14



Joonis 6.15



Joonis 6.16

501. Järves on kaks väikest saart C ja D (joon. 6.15). Selleks, et leida saarte vahelist kaugust, võeti kaldal baas $AB=100$ m ning mõõdeti nurgad $\alpha=108°28'$, $\beta=103°2'$, $\gamma=51°48'$ ja $\delta=37°14'$. Arvuta saarte vaheline kaugus CD.

6.9. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE SIINUS

Mitmesuguste ülesannete lahendamisel tuleb sageli leida niisuguse nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, mis on saadud mingite lähtenurkade liitmise või lahutamise tulemusel. Seamegi kõigepealt eesmärgiks leida $\sin(\alpha+\beta)$ avaldis $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ kaudu, piirdudes teravnurkade α ja β juhuga.

Konstrueerime antud nurkade α ja β summana nurga BAC (joon. 6.16). Joonestame lõigu BC nii, et see oleks risti nurga α lõpphaaraga ning lõikaks nurga $\alpha+\beta$ haarasid. Nii tekib kolmnurk ABC, kus tähistame $AD=h$, $AC=b$ ja $AB=c$. Selle kolmnurga pindala avaldub kujul

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$$

ehk

$$\frac{cb\,\sin(\alpha+\beta)}{2}=\frac{ch\,\sin\alpha}{2}+\frac{hb\,\sin\beta}{2},$$

millest

$$cb\,\sin(\alpha+\beta)=ch\,\sin\alpha+hb\,\sin\beta.$$

Jagame viimase võrduse mõlemaid pooli korrutisega cb. Tulemusena saame

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h}{b}\sin\alpha+\frac{h}{c}\sin\beta.$$

Et kolmnurgas ADC $h : b = \cos\beta$ ja kolmnurgas ABD $h : c = \cos\alpha$, siis

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \quad . \qquad (6.15)$$

Näide 1. Tabeleid kasutamata saame leida sin 75° järgmiselt:

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Valemi (6.15) tuletasime küll positiivsete teravnurkade α ja β juhul, kuid osutub, et see valem kehtib ka mis tahes nurkade α ja β korral.

Näide 2. Leiame sin 150° väärtuse valemi (6.15) abil, võttes üheks liidetavaks nürinurga, s. t. kirjutades nurga 150° kujul 120°+30°. Siis

$$\sin 150^\circ=\sin(120^\circ+30^\circ)=\sin 120^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 120^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$
$$=\sin 60^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-\cos 60^\circ)\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Kontrolliks arvutame sin 150° ka taandamisvalemit kasutades:

$$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=0{,}5.$$

Et tulemus on sama, võib oletada valemi (6.15) kehtivust vähemalt juhul, mil üks nurkadest ei ole teravnurk ($\alpha=120^\circ$).

Kui valem (6.15) kehtib mistahes nurkade α ja β korral, siis muuhulgas

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Seega oleme saanud valemi

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \quad , \qquad (6.16)$$

mis samuti kehtib mis tahes nurkade α ja β korral.

Näide 3. Arvutame $\sin(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$ ja α ning β on teise veerandi nurgad. Selleks leiame kõigepealt nurkade α ja β koosinused:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}.$$

Valemi (6.16) kohaselt on nüüd

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{9}\right)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{6}{15}+\frac{4\sqrt{5}}{15}\approx 0{,}196.$$

Näide 4. Arvutame $\sin 200^\circ\cos 65^\circ-\cos 200^\circ\sin 65^\circ$, kasutades valemit (6.16) paremalt vasakule:

$$\sin 200^\circ\cos 65^\circ-\cos 200^\circ\sin 65^\circ=\sin(200^\circ-65^\circ)=$$
$$=\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A.

502. Leia

1) $\sin\alpha+\sin\beta$ ja $\sin(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$;
2) $\sin\alpha-\sin\beta$ ja $\sin(\alpha-\beta)$, kui $\alpha=25^\circ$, $\beta=55^\circ$;
3) $\cos\alpha+\cos\beta$ ja $\cos(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=43^\circ$, $\beta=63^\circ$;
4) $\cos\alpha+\cos\beta$ ja $\cos(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=428^\circ$, $\beta=734^\circ$;
5) $\tan\alpha+\tan\beta$ ja $\tan(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=2^\circ$, $\beta=58^\circ$;
6) $\tan\alpha+\tan\beta$ ja $\tan(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=90^\circ$, $\beta=50^\circ$;
7) $\sin\alpha+\sin\beta$ ja $\sin(\alpha+\beta)$, kui $\alpha=40^\circ$, $\beta=54^\circ$;
8) $\cos\alpha-\cos\beta$ ja $\cos(\alpha-\beta)$, kui $\alpha=120^\circ$, $\beta=30^\circ$;
9) $\tan\alpha-\tan\beta$ ja $\tan(\alpha-\beta)$, kui $\alpha=79^\circ$, $\beta=29^\circ$.

503. Kahe nurga summa või vahe siinuse valemit kasutades teisenda avaldist

1) $\sin(\gamma+\delta)$;
2) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;
3) $\sin(2\alpha+\gamma)$;
4) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;
5) $\sin(\gamma-\delta)$;
6) $\sin(\alpha-60^\circ)+\sin(\alpha+60^\circ)$;
7) $\sin(\alpha-3\beta)$;
8) $\sin(90^\circ+\alpha)-\sin(90^\circ-\alpha)$.

504. Lihtsusta avaldis

1) $\sin 12^\circ\cos 13^\circ+\cos 12^\circ\sin 13^\circ$;
2) $\sin 20^\circ\cos 25^\circ+\cos 20^\circ\sin 25^\circ$;
3) $\sin 75^\circ\cos 30^\circ-\cos 75^\circ\sin 30^\circ$;
4) $\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha$;
5) $\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha$;
6) $\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$;
7) $\sin 2{,}1\cos 0{,}9+\cos 2{,}1\sin 0{,}9$;
8) $\sin 1\cos 2-\cos 1\sin 2$.

505. Tabeleid kasutamata arvuta

1) $\sin 105^\circ$;
2) $\sin 120^\circ$;
3) $\sin 15^\circ$;
4) $\sin 240^\circ$;
5) $\sin 300^\circ$;
6) $\sin 210^\circ$.

506. Tuleta valem $\sin(180^\circ+\alpha)$ arvutamiseks.

507. Lihtsusta avaldis

1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta$;

2) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$;

3) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\sin 5^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 5^\circ}$.

B.

508. Tõesta samasus

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\sin(90^\circ+\alpha) = \sin(90^\circ-\alpha)$;

3) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

509. Tõesta, et $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, kui α ja β on positiivsed teravnurgad.

510. Arvuta

1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$, kui $\sin\alpha = -0{,}6$ ja α on IV veerandi nurk;

2) $\sin(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ ja α ning β on sama veerandi nurgad;

3) $\sin(\alpha+\beta)$, kui $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{8}{17}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ja $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

6.10. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE KOOSINUS

Leiame nüüd $\cos(\alpha+\beta)$ ning $\cos(\alpha-\beta)$ avaldised $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ ja $\cos\beta$ kaudu. Selleks teisendame avaldist $\cos(\alpha+\beta)$ järgmiselt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] =$$
$$= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Järelikult

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad . \qquad (6.17)$$

V

Näide 1. Leiame valemit (6.17) kasutades $\cos 135^\circ$:

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ+45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analoogiliselt valemiga (6.17) leiame ka

$$\cos(\alpha-\beta) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha-\beta\right)\right] =$$
$$= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ehk

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad . \qquad (6.18)$$

V

Näide 2. Avaldise $\cos\frac{9\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{\pi}{7}$ väärtuseks saame valemi (6.18) põhjal:

$$\cos\frac{9\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{9\pi}{14} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

A.

511. Valemeid (6.15)—(6.18) kasutades teisenda avaldist

1) $\cos(x+y)$;
2) $\cos(x+y) + \cos(x-y)$;
3) $\cos(x+2y)$;
4) $\cos(x+y) - \cos(x-y)$;
5) $\cos(3x-y)$;
6) $\cos(x+y) + \sin(x-y)$;
7) $\cos(y-2x)$;
8) $\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.

512. Lihtsusta avaldis

1) $\cos 88^\circ \cos 77^\circ - \sin 88^\circ \sin 77^\circ$;
2) $\cos 44^\circ \cos 56^\circ - \sin 44^\circ \sin 56^\circ$;
3) $\cos 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 80^\circ \sin 50^\circ$;
4) $\cos 40^\circ \cos 100^\circ + \sin 40^\circ \sin 100^\circ$;
5) $\cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha \cos 2\alpha$;
6) $\cos\alpha \cos 3\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha$;

7) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{4}$;

8) $\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$;

9) $\cos 4\cos 3+\sin 4\sin 3$.

513. Tabeleid kasutamata arvuta

1) $\cos 105°$; 2) $\cos 75°$; 3) $\cos 15°$;
4) $\sin 75°$; 5) $\sin 225°$; 6) $\sin(-75°)$.

B.

514. Lihtsusta avaldis

1) $\cos(\alpha+60°)-\cos(\alpha-60°)$;
2) $\cos(\pi:6-\alpha)+\sin(\pi:3-\alpha)$;
3) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha$;
4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;
5) $\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$;
6) $\frac{\sin 5°\cos 10°-\cos 5°\sin 10°}{\sin 10°\cos 20°+\sin 20°\cos 10°}$.

515. Arvuta

1) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, kui $\sin\alpha=-0{,}6$ ja $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{2}{3}$, α on III veerandi nurk ja β on I veerandi nurk.

516. Tõesta samasus

1) $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$;
2) $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$.

517. Tuleta taandamisvalemid siinuse, koosinuse ja tangensi arvutamiseks nurkade $90°+\alpha$, $270°-\alpha$ ja $270°+\alpha$ korral.

518. Tuleta valemid $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\sin 3\alpha$ arvutamiseks.

6.11. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE TANGENS

Leiame veel $\tan(\alpha-\beta)$ ning $\tan(\alpha-\beta)$ avaldised $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ kaudu.

Et iga α korral

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

siis valemeid (6.15) ja (6.17) kasutades

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Kui jagada viimase murru lugeja ja nimetaja liikmeti korrutisega $\cos\alpha\cos\beta$, saame:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Seega

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}. \qquad (6.19)$$

V

Näide 1. Leiame $\tan 266°38'$, kui $\tan 86°38'=17$:

$$\tan 266°38'=\tan(180°+86°38')=$$
$$=\frac{\tan 180°+\tan 86°38'}{1-\tan 180°\tan 86°38'}=\frac{0+17}{1-0\cdot 17}=17.$$

Tuletame valemi $\tan(\alpha-\beta)$ arvutamiseks:

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

s. t.

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}. \qquad (6.20)$$

V

Näide 2. Leiame tabeleid kasutamata $\tan 15°$:

$$\tan 15°=\tan(45°-30°)=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=$$
$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}.$$

A.

519. Valemeid (6.19) ja (6.20) kasutades teisenda avaldist
1) $\tan(x+y)$;
2) $\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)$;
3) $\tan(2x+y)$;
4) $(1+\tan\alpha\tan\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)$.

520. Lihtsusta avaldis
1) $\dfrac{\tan 40^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ}$;
2) $\dfrac{\tan 125^\circ-\tan 80^\circ}{1+\tan 125^\circ\tan 80^\circ}$;
3) $\dfrac{\tan 2-\tan 0{,}88}{1+\tan 2\tan 0{,}88}$;
4) $\dfrac{\tan 2\alpha+\tan 3\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan 3\alpha}$;
5) $\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan 2\alpha}$;
6) $\dfrac{1-\tan 74^\circ\tan 76^\circ}{\tan 74^\circ+\tan 76^\circ}$.

521. Tabeleid kasutamata arvuta
1) $\tan 105^\circ$;
2) $\tan 15^\circ$;
3) $\tan 75^\circ$;
4) $\tan 225^\circ$;
5) $\tan(-75^\circ)$;
6) $\tan(-225^\circ)$.

B.

522. Tõesta samasus
1) $\tan(x+y)-\tan x-\tan y=\tan(x+y)\tan x\tan y$;
2) $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$.

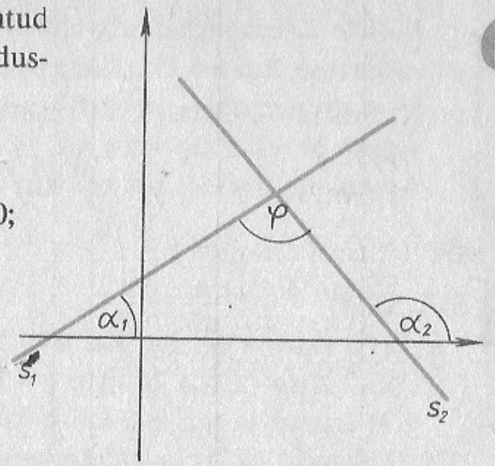
523. Arvuta
1) $\tan(\alpha+\beta)$, kui $\tan\alpha=2$ ja $\tan\beta=3$;
2) $\tan(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{2}{5}$,
α on IV veerandi nurk ja β on III veerandi nurk.

524. Tõesta, et kui $\tan\alpha=\frac{2}{5}$, $\tan\beta=\frac{3}{7}$ ning α ja β on teravnurgad, siis $\alpha+\beta=45^\circ$.

525. Tuleta valem $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ arvutamiseks $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ja $\tan\gamma$ kaudu. Arvuta $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$, kui $\alpha=\beta=60^\circ$ ja $\gamma=45^\circ$.

526. Kasutades joonist 6.17 tõesta, et sirgete s_1 ja s_2 vahelise nurga φ tangens avaldub kujul
$\tan\varphi=\dfrac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$,
kus a_1 ja a_2 on vastavalt sirgete s_1 ja s_2 tõusud.

527. Kasutades eelmises ülesandes antud valemit leia, millise nurga moodustavad sirged
1) $y=3x+4$ ja $y=2x+6$;
2) $y=0{,}5x+4$ ja $y=-x$;
3) $2x+5y+8=0$ ja $3x-2y+1=0$;
4) $y=2x$ ja $y=-1{,}5x$;
5) $4x-y=0$ ja $8x-2y+3=0$.



Joonis 6.17

6.12. KAHEKORDSE NURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Kui kirjutada nurk 2α kujul $\alpha+\alpha$, saame kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemeist (6.15), (6.17) ja (6.19), et

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\quad . \qquad (6.21)$$

Neid valemeid nimetatakse vastavalt kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeiks.

Näide 1. Leiame $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$ ja $\tan 120^\circ$, kasutades valemeid (6.21):

$$\sin 120^\circ=\sin(2\cdot 60^\circ)=2\sin 60^\circ\cos 60^\circ=$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ=\cos(2\cdot 60^\circ)=\cos^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2};$$

$$\tan 120^\circ=\tan(2\cdot 60^\circ)=\frac{2\tan 60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ}=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3}.$$

Näide 2. Lihtsustame avaldise $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha$ ja arvutame selle väärtuse, kui $\alpha=15°$. Kõigepealt teisendame antud avaldist järgmiselt:

$1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=1-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2-\sin^2 2\alpha=$

$=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha.$

Asendame $\alpha=15°$, siis $\cos 4\alpha=\cos(4\cdot 15°)=\cos 60°=0{,}5$.

A.

528. Leia

1) $2\sin\alpha$ ja $\sin 2\alpha$, kui $\alpha=45°$;
2) $2\cos\alpha$ ja $\cos 2\alpha$, kui $\alpha=30°$;
3) $2\tan\alpha$ ja $\tan 2\alpha$, kui $\alpha=90°$.

529. Valemeid (6.21) kasutades teisenda avaldist

1) $\sin 2x$;
2) $2\sin 35°\cos 35°$;
3) $\sin 2(x+5\pi)$;
4) $\cos^2 25°-\sin^2 25°$;
5) $\cos 2x$;
6) $\cos^2(x-45°)-\sin^2(x-45°)$;
7) $\cos 2(\pi+\beta)$;
8) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;
9) $\tan 2x$;
10) $\tan 2\beta\,(1-\tan^2\beta)$;
11) $\tan 2(\alpha+\beta)$;
12) $2\tan 5\alpha : (1-\tan^2 5\alpha)$.

530. Lihtsusta avaldis

1) $2\sin x\cos x$;
2) $2\cos\beta\sin\beta$;
3) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;
4) $2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
5) $2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$;
6) $2\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}$;
7) $\sin\alpha\cos\alpha$;
8) $0{,}5\sin\beta\cos\beta$;
9) $2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
10) $\sin 2\alpha\cos 2\alpha$;
11) $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$;
12) $\frac{2\tan\frac{\pi}{18}}{1-\tan^2\frac{\pi}{18}}$;
13) $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}$;
14) $\frac{4\tan(x-y)}{1-\tan^2(x-y)}$.

531. Arvuta

1) $\sin 2\alpha$, kui $\sin\alpha=0{,}9$ ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
2) $\cos 2\alpha$, kui $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$ ja $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
3) $\tan 2\alpha$, kui $\tan\alpha=-2$;
4) $\tan 2\alpha$, kui $\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

532. Avalda $\cos 2\alpha$ ainult $\sin\alpha$ ja ainult $\cos\alpha$ kaudu.

533. Lihtsusta avaldis

1) $2\sin 40°\sin 50°$;
2) $(\sin 10°+\sin 80°)(\cos 80°-\cos 10°)$;
3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;
4) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha$;
5) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;
6) $1-2\sin^2\alpha$;
7) $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;
8) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
9) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

534. Tõesta samasus

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;
2) $4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha=4\sin^2\alpha$;
3) $\sin 2\alpha-\tan\alpha=\cos 2\alpha\tan\alpha$;
4) $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$;
5) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\tan\alpha$;
6) $\frac{3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3}{1+\tan^2\alpha}=3+5\sin 2\alpha$.

535. Kirjutades nurga α kujul $2\cdot\frac{\alpha}{2}$ avalda $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ nurga $\frac{\alpha}{2}$ trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

B.

536. Lihtsusta avaldis ja arvuta

1) $16\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha$, kui $\alpha=\frac{\pi}{64}$
2) $8\sin 3\alpha\cos 3\alpha\cos 6\alpha\cos 12\alpha$, kui $\alpha=\frac{\pi}{72}$;
3) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha$, kui $\alpha=\frac{3\pi}{2}$;
4) $\frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}$, kui $\alpha=\frac{\pi}{16}$;

5) $\frac{\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$, kui $\alpha=\frac{\pi}{36}$;

6) $\frac{8\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$, kui $\tan\alpha=5$.

537. Avalda $\sin 4\alpha$ ja $\cos 4\alpha$ nurga α trigonomeetriliste funktsioonide kaudu.

538. Leia $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ ning $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

359. Tõesta, et $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$, kui $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

540. Ristküliku diagonaal d moodustab küljega nurga α. Leia ristküliku pindala.

6.13. POOLNURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS

Ülesande 535 lahendamisel saime, et $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Kasutame seda võrdust $\sin\frac{\alpha}{2}$ leidmiseks:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Seega

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$

ehk

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$ millest

V $$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad (6.22)$$

Märk («+» või «−») juure ees võetakse veerandi järgi, kuhu kuulub nurk $\frac{\alpha}{2}$.

Näide 1. Arvutame $\sin\frac{\alpha}{2}$, kui on teada, et $\cos\alpha=0{,}6$ ja $360°<\alpha<45°$.

Antud juhul on $\frac{\alpha}{2}$ kolmanda veerandi nurk ($180°<\frac{\alpha}{2}<225°$). Seega $\sin\frac{\alpha}{2}<0$ ning valemi (6.22) kohaselt

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}}=-\sqrt{0{,}2}\approx-0{,}4472.$$

Tuletame ka valemi $\cos\frac{\alpha}{2}$ arvutamiseks, teisendades $\cos\alpha$ avaldist järgmiselt:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.$$

Seega

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$$

ehk

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

millest

V $$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad (6.23)$$

Märk («+» või «−») juure ees võetakse veerandi järgi, kuhu kuulub nurk $\frac{\alpha}{2}$.

Näide 2. Lihtsustame avaldist $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos 2\alpha$, kasutades valemeid (6.23) ja (6.21):

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos 2\alpha=2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$

$$=2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=(1-\cos^2\alpha)+\cos\alpha+\sin^2\alpha=$$

$$=2\sin^2\alpha+\cos\alpha.$$

Tuletame lõpuks veel valemi $\tan\frac{\alpha}{2}$ arvutamiseks. Selleks leiame $\tan^2\frac{\alpha}{2}$, kasutades seoseid (6.22) ja (6.23):

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

ja seega

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} \qquad (6.24)$$

Märk («+» või «−») juure ees võetakse veerandi järgi, kuhu kuulub nurk $\frac{\alpha}{2}$.

Suuruse $\tan\frac{\alpha}{2}$ arvutamiseks saab tuletada veel kaks valemit, mis erinevalt valemist (6.24) ei sisalda kahekordset märki ± ega juuravaldist. Need tuletame järgmiselt:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Seega

V

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ \tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}} \qquad (6.25)$$

Näide 3. Leiame tan 15° kõigepealt valemi (6.24) järgi:

$$\tan 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}:2}{1+\sqrt{3}:2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=2-\sqrt{3}$$

ja siis valemeist (6.25) teise järgi:

$$\tan 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{1-\sqrt{3}:2}{0{,}5}=2-\sqrt{3}.$$

A.

541. Arvuta $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui

1) $\cos\alpha=0{,}8$ ja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\alpha=0{,}1$ ja $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

3) $\cos\alpha=-0{,}25$ ja $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

4) $\cos\alpha=-0{,}6$ ja $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

5) $\tan\alpha=3\frac{3}{7}$ ja $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ja $540^\circ<\alpha<630^\circ$;

7) $\cos\alpha=1-2a$.

542. Arvuta tabeleid kasutamata $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui
1) $\alpha=22^\circ30'$; 2) $\alpha=15^\circ$; 3) $\alpha=7^\circ30'$.

543. Lihtsusta avaldis

1) $0{,}5(1-\cos 2\alpha)$; 2) $0{,}5(1+\cos 6\alpha)$;

3) $\frac{1-\cos 8\alpha}{2}$; 4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{2}$;

5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$; 6) $1-2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

7) $\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$; 8) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}+2\tan\frac{\alpha}{2}$;

9) $\cos\alpha+\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}$; 10) $(1+\cos\alpha)\tan\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha$.

544. Tõesta samasus

1) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;

2) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=2\sin\alpha+\sin 2\alpha$;

3) $1-\frac{1}{2}\tan^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)=\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

4) $\tan^2 3\alpha(1+\cos 6\alpha)=1-\cos 6\alpha$;

5) $2\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})=1+\sin\alpha$;

6) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}=2$;

7) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}-2\cos^2\frac{\alpha}{2}=-2\cos\alpha$;

8) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

545. Arvuta võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus ja koosinus, kui tipunurga koosinus on 1) 0,75; 2) 0,96.

B.

546. Rombi ühe sisenurga koosinus on $-\frac{21}{25}$. Leia rombi diagonaalide ja külgede vaheliste nurkade siinused ja koosinused.

547. Kesknurk α toetub veerandringjoonest väiksemale kaarele. Leia samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens, kui $\cos\alpha=\frac{3}{8}$.

548. Tõesta, et kui $\tan\frac{x}{2}=t$, siis $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ja $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

549. Arvuta $\sin x$ ja $\cos x$, kui $\tan\frac{x}{2}$ on

1) 1; 2) 5; 3) $0{,}25\sqrt{3}$; 4) $-0{,}7$; 5) -3; 6) $\sqrt{2}$.

550. Kasutades ülesandes 548 antud seoseid, avalda $\tan\frac{x}{2}$ kaudu

1) $\sin x+\cos x$;
2) $\sin 2x$;
3) $\sin x\cos x$;
4) $\cos 2x$;
5) $\tan x$;
6) $\sin x+\tan x$.

6.14. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS

Trigonomeetrilisi funktsioone sisaldavate avaldiste lihtsustamisel leiavad tihti kasutamist valemid kaksliikmete $\sin\alpha+\sin\beta$, $\sin\alpha-\sin\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta$ ja $\cos\alpha-\cos\beta$ teisendamiseks korrutiseks. Nende valemite tuletamisel lähtume seosest (6.15) ja (6.16), esitades nad kuiul

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.
$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$.

Liidame ja lahutame nende võrduste vastavad pooled. Tulemusena saame seosed

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y. \qquad (6.26)$$

Leiame nüüd x ja y nii, et oleks $x+y=\alpha$ ja $x-y=\beta$. Seda võrrandisüsteemi lahendades saame, et

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Asendades võrdustes (6.26) nurgad $x+y$, $x-y$, x ja y vastavate avaldistega, jõuame valemiteni

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}} \qquad (6.27)$$

V

Näide 1. Teisendame korrutiseks avaldise $\sin x+\sin 3x$, kasutades valemeist (6.27) esimest:

$$\sin x+\sin 3x=2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=$$
$$=2\sin 2x\cos(-x)=2\sin 2x\cos x.$$

Näide 2. Teisendame korrutiseks avaldise $\sin x-\cos x$. Selleks kirjutame $\cos x$ kujul $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ning kasutame valemeist (6.27) teist:

$$\sin x-\cos x=\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$
$$=2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2x-\frac{\pi}{2}}{2}=$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Kui lähtuda valemeist

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$,
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

ja toimida analoogiliselt valemite (6.27) tuletamisega, saame valemid

V

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (6.28)$$

Näide 3. Teisendame korrutiseks avaldise $2\cos\alpha+1$:

$$2\cos\alpha+1=2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=2(\cos\alpha+\cos 60°)=$$
$$=2\cdot 2\cos\frac{\alpha+60°}{2}\cos\frac{\alpha-60°}{2}=$$
$$=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30°\right).$$

Näide 4. Lihtsustame avaldist $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$, teisendades murru lugeja ja nimetaja korrutiseks:

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Valemite (6.27) ja (6.28) abil saab vajaduse korral ka trigonomeetriliste funktsioonide korrutist teisendada summaks. Selleks kasutame neid valemeid «tagurpidi», leides antud nurkade $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ja $\frac{\alpha-\beta}{2}$ järgi nurgad α ja β.

Näide 5. Teisendame korrutise $\sin 37°30'\cos 7°30'$ summaks, kasutades näiteks valemit

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

milles esineb siinuse ja koosinuse korrutis. Nüüd

$$\begin{cases}\frac{\alpha+\beta}{2}=37°30'\\ \frac{\alpha-\beta}{2}=7°30'\end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases}\alpha+\beta=75°\\ \alpha-\beta=15°\end{cases}$$

millest $\alpha=45°$ ning $\beta=30°$. Seega

$$\sin 37°30'\cos 7°30'=\frac{1}{2}(\sin 45°+\sin 30°)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}.$$

A.

551. Teisenda korrutiseks ning lihtsusta avaldis

1) $\sin 140°+\sin 40°$;
2) $\sin 140°-\sin 40°$;
3) $\sin 28°+\sin 17°$;
4) $\sin 28°-\sin 17°$;
5) $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin\frac{7\pi}{3}-\sin\frac{3\pi}{5}$;
7) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{10}$;
8) $\sin 0{,}8\pi-\sin 0{,}4\pi$;
9) $\sin 4+\sin 6$;
10) $\sin 3{,}7-\sin 2{,}1$.

552. Teisenda korrutiseks ning lihtsusta avaldis

1) $\cos 110°+\cos 12°$;
2) $\cos 110°-\cos 12°$;
3) $\cos 16°+\cos 14°$;
4) $\cos 16°-\cos 14°$;
5) $\cos 14°16'+\cos 7°8'$;
6) $\cos 44°42'-\cos 21°12'$;
7) $\cos 1{,}8\pi+\cos 1{,}2\pi$;
8) $\cos 1{,}5\pi-\cos 4\pi$;
9) $\cos 0{,}8+\cos 1{,}2$;
10) $\cos 2{,}4-\cos 10{,}4$.

553. Teisenda korrutiseks ning lihtsusta avaldis

1) $\sin\alpha+\cos 3\alpha$;
2) $2\cos\alpha+\sqrt{2}$;
3) $\sin 4\alpha-\cos 4\alpha$;
4) $2\sin\alpha+\sqrt{3}$;
5) $\cos\alpha-\sin\alpha$;
6) $1-2\sin\alpha$;
7) $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha$;
8) $1+\sin\alpha$;
9) $\sin 5\alpha+\cos\alpha$;
10) $\cos\alpha+1$.

554. Teisenda korrutiseks ning lihtsusta avaldis

1) $\sin(30°+x)+\sin(30°-x)$;
2) $\cos 2+\cos 4+\cos 3$;
3) $\sin(60°-x)-\sin(60°+x)$;
4) $\cos(60°-x)+\cos x$;
5) $\sin x-2\sin 2x+\sin 3x$;
6) $\sin^2 37°-\sin^2 53°$;
7) $\cos^2 10°-\cos^2 50°$;
8) $\cos 80°+\cos 40°-\cos 20°$;
9) $\sin 55°+\sin 5°-\cos 25°$.

555. Tõesta samasus

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45°+\alpha)$;
2) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45°+\alpha)$;
3) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\tan 2\alpha$;

4) $\frac{\cos(10°+2\alpha)-\cos 60°}{\cos(10°+2\alpha)+\cos 60°}=\tan(35°+\alpha)\tan(25°-\alpha)$;

5) $1-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha \cos 2\beta$.

556. Lihtsusta avaldis

1) $\frac{\sin^2 3\alpha-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 2) $\frac{\cos^2 5\alpha-\sin^2 3\alpha}{\cos 8\alpha}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$; 4) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 6\alpha}$;

5) $4-(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2$;

6) $\frac{\sin(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)}{\sin(45°+\alpha)+\sin(45°-\alpha)}$;

7) $\frac{\sin 76°-\sin 64°}{\sin 86°-\sin 74°}-\cos 10°$;

8) $\frac{\sin 76°+\sin 64°}{\sin 86°+\sin 74°}-\cos 10°$.

557. Teisenda üksliikmeks summa

1) $\tan\alpha+\tan\beta$; 2) $\tan\alpha-\tan\beta$.

558. Teisenda üksliikmeks summa

1) $\tan 55°+\tan 35°$; 2) $\tan 55°-\tan 35°$;

3) $\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{7}$; 4) $\tan\frac{2\pi}{3}-\tan\frac{5\pi}{6}$;

5) $\tan\alpha-\tan\frac{\alpha}{2}$; 6) $\tan 1+\tan 3$;

7) $1+\tan\alpha$; 8) $\tan\alpha+\sqrt{3}$.

559. Teisenda summaks korrutis

1) $\sin 40° \cos 20°$; 2) $2\cos 80° \sin 20°$;

3) $2\sin 10° \cos 100°$; 4) $\cos 12° \sin 6°$;

5) $2\cos 70° \cos 40°$; 6) $\sin 55° \sin 17°$;

7) $\cos 4x \cos 6x$; 8) $\sin 3x \sin 17x$;

9) $4\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$; 10) $\sin(x-y)\cos(x+y)$;

11) $\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{10}$; 12) $\cos(x+y)\cos(x-y)$;

13) $\cos 4 \sin 6$; 14) $\sin(30°-x)\sin(x-60°)$;

15) $\sin x \sin 2x \sin 3x$; 16) $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$;

17) $4\sin x \sin(60°-x)\sin(60°+x)$.

560. Tõesta võrduse kehtivus, kui $\alpha+\beta+\gamma=\pi$:

1) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;

2) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$.

KORDAMINE

A.

561. Lihtsusta avaldis

1) $\sin^2 x+\cos^2 x$; 2) $\sin^2(x+40°)+\cos^2(x+40°)$;

3) $\sin^2 5x+\cos^2 5x$; 4) $\cos^2(x+\pi)+\sin^2(x+\pi)$;

5) $\cos x \tan x$; 6) $\cos 4x \tan 4x$;

7) $\frac{\sin 6x}{\cos 6x}$; 8) $\frac{\sin(3x+50°)}{\cos(3x+50°)}$;

9) $1+\tan^2 2x$; 10) $1+\tan^2 60°$;

11) $1+\tan^2 45°$; 12) $\sin^2 4x(1+\tan^2 4x)$.

562. Lihtsusta avaldis

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)-\sin^2\alpha$;

2) $\sin^2\alpha \tan^2\alpha+\sin^2\alpha+1$;

3) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha-\tan^2\alpha \sin^2\alpha$;

4) $\cos\alpha+\sin\alpha \tan\alpha$;

5) $\sin^2\alpha \sin^2\beta+\sin^2\alpha \cos^2\beta-1$.

563. Arvuta

1) $\cos^2 x-\sin^2 x$, kui $\cos x=0{,}25$;

2) $\cos^2 x$, kui $\tan x=12$;

3) $\tan^2 x$, kui $\cos x=0{,}75$;

4) $\sin x$, kui $\cos x=1{,}5$;

5) $\cos x$, kui $\sin x=0{,}02$ ja $90°<x<180°$;

6) $\tan x$, kui $\cos x=-0{,}4$ ja $180°<x<270°$;

7) $\sin x$, kui $\tan x=7$ ja $180°<x<270°$;

8) $\tan x$, kui $\sin x=0{,}8$ ja $0°<x<90°$.

564. Tõesta samasus

1) $\frac{1+2\sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}$;

2) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\tan^2\alpha$;

3) $\cos^2\alpha(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)=\cos 2\alpha$;

4) $\frac{1-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}$.

565. Merekompassil jaotatakse täispööre 32 võrdseks osaks, mida nimetatakse **rumbideks**. Leia ühe rumbi suurus kraadides ja radiaanides.

566. Arvuta ringjoone kaarekraadi pikkus, kui ringjoone raadius on 1) 45 cm; 2) 18 m; 3) 15 m; 4) 1,8 km.

567. Kosmoselaev lendab ümber Maa 327 km kaugusel. Arvuta kosmoselaeva liikumise kaarekraadi, -minuti ja -sekundi pikkus eeldusel, et Maa raadius on 6378 km.

568. Leia kaareradiaani pikkus, kui ringjoone diameeter on 1) 10 cm; 2) 4,8 cm; 3) 84 mm; 4) 1,3 m; 5) 12 km.

569. Leia ringjoone pikkus, kui kaareradiaani pikkus on 1) 50 cm; 2) 7,5 m; 3) 11 km; 4) 1,07 m.

570. Esita radiaanides (täpsusega 0,01 rad) nurk, mis kraadimõõdus on

1) 42°; 2) 130°30′; 3) 645°; 4) −76°48′;
5) 10°; 6) 203°36′; 7) 755°; 8) −425°.

571. Esita kraadimõõdus nurk, mis radiaanmõõdus on

1) 3π; 2) $\frac{2\pi}{15}$; 3) $-\frac{5\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{36}$;
5) $\frac{3\pi}{16}$; 6) $\frac{4\pi}{7}$; 7) $-\frac{2\pi}{17}$; 8) 5π;
9) 4,3; 10) 0,18; 11) −0,628; 12) 1,07;
13) 0,72; 14) 2,5; 15) −2,08; 16) 6.

572. Leia

1) $\sin 14°18'$; 2) $\cos(-87°7')$; 3) $\tan 172°27'$;
4) $\sin(-800°)$; 5) $\cos 184°15'$; 6) $\tan(-50°2')$;
7) $\sin 3\pi$; 8) $\cos\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$; 9) $\tan\frac{\pi}{36}$;
10) $\sin\frac{3\pi}{16}$; 11) $\cos\frac{4\pi}{7}$; 12) $\tan\left(-\frac{19\pi}{17}\right)$;
13) $\sin(-1,4)$; 14) $\cos 2,5$; 15) $\tan(-2,4)$.

573. Kumb on suurem, kas

1) sin2 või 2? 2) tan 80° või 1?
3) cos(−1) või 1? 4) sin 0,8 või 1?

574. Leia

1) $0,2-\sin 0,2+\tan 0,2$;
2) $2\sin 1,57-0,8\cos 1,15$;
3) $4\tan 1,2\cdot\cos 1,2-1,5\tan 1$.

575. Arvuta sektori kaare pikkus ning pindala, kui on antud raadius r ja kesknurk α:

1) $r=90$ cm ja $\alpha=20°$; 2) $r=30$ cm ja $\alpha=84°$;
3) $r=1,2$ cm ja $\alpha=243°$; 4) $r=5$ m ja $\alpha=351°$;
5) $r=2,4$ cm ja $\alpha=0,5$ rad; 6) $r=0,7$ ja $\alpha=4$ rad;
7) $r=15$ m ja $\alpha=0,8$ rad; 8) $r=4$ m ja $\alpha=3,2$ rad.

576. Arvuta sektori raadius ning kesknurk, kui on antud kaare pikkus l ja sektori pindala S:

1) $l=8$ ja $S=32$; 2) $l=0,7$ ja $S=0,28$;
3) $l=1$ ja $S=5$; 4) $l=1,8$ ja $S=27$.

577. Tõesta samasus

1) $\tan^2(\pi+\alpha)-\sin^2(\pi-\alpha)=\tan^2\alpha\,\sin^2\alpha$;
2) $[1-\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)]^2=2(1+\cos\alpha)(1+\sin\alpha)$;
3) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)-\cos\alpha\,\tan^2\alpha}\cdot\frac{\sin(\pi-\alpha):\tan^2\alpha+\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=1$;
4) $\left[\sin(4\pi+\alpha)+\frac{1}{\sin(\pi+\alpha)}\right]\left[\cos(2\pi-\alpha)+\frac{1}{\cos(\pi-\alpha)}\right]=$
$=\sin\alpha\,\cos\alpha$.

578. Lihtsusta avaldis

1) $[\tan(\pi+\alpha)+\cos\alpha:\sin(\pi-\alpha)]^2-[\tan(7\pi+\alpha)+\cos(\pi+\alpha):\sin\alpha]^2$;
2) $\sin^4(\pi-\alpha)+\cos^2(\pi+\alpha)+\sin^2\alpha\,\cos^2(2\pi-\alpha)$;
3) $\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-1\right]:\tan^2(\pi+\alpha)$;
4) $\frac{\sin^2(2\pi-\alpha)[1+\cos(\pi-\alpha)]}{1+\cos(\pi+\alpha)}$.

579. Lihtsusta avaldis

1) $\sin 28°\cos 32°+\cos 28°\sin 32°$;
2) $\cos 89°\cos 44°+\sin 89°\sin 44°$;
3) $\sin 17°\cos 16°-\cos 17°\sin 16°$;
4) $\cos 40°\cos 20°-\sin 40°\sin 20°$;
5) $\frac{\tan 80°+\tan 40°}{1-\tan 80°\,\tan 40°}$;
6) $\frac{\tan 258°-\tan 108°}{1+\tan 258°\,\tan 108°}$;
7) $(\tan 73°-\tan 23°):(1+\tan 73°\,\tan 23°)$;
8) $\cos(45°+\alpha)\cos(15°-\alpha)-\sin(45°+\alpha)\sin(15°-\alpha)$.

580. Lihtsusta avaldis

1) $\cos 135° \sin 225° : \cos(-60°) - \tan 180° \tan 60° : \cos 540°$;
2) $\sin^2 330° - \cos^2(-120°) - \tan^2 240° + \tan^2 300°$;
3) $\sin 390° + \cos 390° + \tan 390°$;
4) $\sin 900° \cos 182° + \cos 720° \sin 270°$;
5) $\cos^2 190° + \sin^2 350° + \tan^2 170°$.

581. Leia x, kui

1) $\sin x = 0{,}9736$, $0° < x < 90°$;
2) $\sin x = 0{,}9736$, $90° < x < 180°$;
3) $\sin x = -0{,}6053$, $180° < x < 270°$;
4) $\sin x = 0{,}4527$, $0° < x < 360°$;
5) $\sin x = -0{,}2736$, $270° < x < 360°$;
6) $\cos x = 0{,}0172$, $0° < x < 90°$;
7) $\cos x = 0{,}8603$, $90° < x < 180°$;
8) $\cos x = -0{,}555$, $90° < x < 180°$;
9) $\cos x = 3{,}675$, $0° < x < 90°$;
10) $\tan x = -1{,}5444$, $90° < x < 180°$;
11) $\tan x = -2{,}605$, $0° < x < 360°$;
12) $\tan x = 6{,}911$, $180° < x < 270°$.

582. Lihtsusta avaldis

1) $2 \sin(90° - \alpha) \sin \alpha$;
2) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;
3) $\dfrac{4 \cos^2\alpha \tan 0{,}5\alpha}{\tan^2 0{,}5\alpha - 1}$;
4) $\dfrac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha}$;
5) $\dfrac{1}{1-\tan \alpha} - \dfrac{1}{1+\tan \alpha}$;
6) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}$;
7) $\dfrac{\tan \alpha}{1+\tan \alpha} + \dfrac{\tan \alpha}{1-\tan \alpha}$;
8) $\dfrac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\cos \alpha}$.

583. Teisenda korrutiseks avaldis

1) $\cos 3\alpha + \cos 11\alpha$;
2) $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$;
3) $\sin 4\alpha - \sin 6\alpha$;
4) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
5) $\cos^2 2\alpha - \cos^2 6\alpha$;
6) $1 : \sin^2\alpha - \tan^2\alpha - 1$.

584. Teisenda summaks avaldis

1) $\sin 44° \cos 46°$;
2) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{10}$;
3) $2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha$;
4) $6 \sin(\alpha - \beta) \cos \beta$;
5) $\sin 6\alpha \cos 4\alpha$;
6) $2 \sin 4\alpha \sin(-5\alpha)$.

585. Selgita milliste parameetri a väärtuste korral on järgmisel võrdusel mõte:

1) $\cos x = a$;
2) $\sin x = a$;
3) $\sin x = 2 - a$;
4) $\cos x = a - 3$;
5) $\cos x = 3a + 1$;
6) $\sin x = 5 - 2a$;
7) $\tan x = \dfrac{2}{a}$;
8) $\tan x = \dfrac{4a+1}{a-3}$;
9) $\cos x = \dfrac{a+1}{a-1}$;
10) $\sin x = \dfrac{2a+3}{3a-2}$;
11) $\sin x = 12 - 4a$, kui $0 \leqslant x \leqslant \pi$;
12) $\cos x = 2a + 3$, kui $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$;
13) $\tan x = \dfrac{a}{2a+4}$, kui $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

586. Arvuta tabeleid kasutamata

$\tan 41° \tan 42° \tan 43° \ldots \tan 48° \tan 49°$.

587. Leia $1 - \tan \alpha \cos^2\alpha$, kui $\sin \alpha + \cos \alpha = \dfrac{5}{7}$.

588. Leia $\cos^2\alpha \sin^2\alpha$, kui $\tan^2\alpha - 3 \tan \alpha + 1 = 0$.

589. Tõesta võrdus

1) $\sin 55° + \sin 5° - \cos 25° = 0$;
2) $\cos^2 50° - 4 \sin^2 25° \sin^2 65° = -\cos 80°$;
3) $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81° = 4$;
4) $\dfrac{\sin 20° \cos 10°}{(1+\cos 10°)(1+\cos 20°)} = \tan 5°$.

590. Tõesta samasus

1) $\dfrac{2 \cos^2\alpha - 1}{2 \tan(45° - \alpha) \sin^2(45° + \alpha)} = 1$;
2) $\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \left(1 + \tan \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha$;
3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos \alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan \dfrac{\alpha}{2}$;
4) $\dfrac{4 \sin\alpha \cos\alpha(1 - \tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha} = \sin 4\alpha$;
5) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha : \tan\alpha = 1 : \tan\alpha$.

7 ÜLDISEKS KORDAMISEKS

591. Arvuta

1) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$;

2) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$;

3) $4:\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot 8+\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{3}$;

4) $14{,}49:45-0{,}022+(3{,}49+0{,}49)\cdot 0{,}15+0{,}103$;

5) $(2{,}75+0{,}19):0{,}3-0{,}8+(39{,}2-17{,}4)\cdot 1{,}15$;

6) $13{,}59:4{,}5+(300{,}1+2\cdot 5{,}45)\cdot 0{,}012$.

592. Mitme protsendi võrra on 67,2 suurem kui 60,2? Vastus ümarda kümnendikeni.

593. Mitme protsendi võrra on 12,6 väiksem kui 15,6? Vastus ümarda kümnendikeni.

594. Pärast hinna alandamist 25 % võrra maksis ülikond 81 rbl. Kui palju maksis see ülikond enne?

595. Kahe arvu summa on 2490. Leia need arvud teades, et 6,5 % esimesest võrdub 8,5 %-ga teisest.

596. Linnas on praegu 48 400 elanikku. On teada, et selle linna elanike arv suurenes iga aastaga 10 %. Mitu elanikku oli linnas kahe aasta eest?

597. Ava sulud ja lihtsusta avaldis

1) $(3x-2)^2-(4x-3)(4x+3)+(1-5x)^2$;

2) $(x^2-3x-1)(2x^2+x-3)-(x^2-3)^2$;

3) $(a-2b)^2+(2b+a)(2b-a)-4b^2$;

4) $(7a-3b)(7a+3b)-(7a-5b)^2$.

598. Lihtsusta avaldis

1) $\left(\frac{5}{2a+3}+\frac{2}{3-2a}+\frac{2a+9}{4a^2-9}\right):\frac{8}{4a^2+12a+9}$;

2) $\left(\frac{1}{2a-b}+\frac{3b}{b^2-4a^2}-\frac{2}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)$;

3) $\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]:\frac{x-y}{x}$;

4) $\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)$.

599. Lahenda võrrand

1) $(x-1)(x-2)=(x-3)(x+1)$;

2) $(x+2)^2-(x+1)^2=9$;

3) $(3x-4)^2-(3x-5)^2=6$;

4) $(5x-7)^2-(5x-6)(5x+6)=0$;

5) $\frac{4x-9}{5}=\frac{6x-7}{8}$;

6) $\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+3)}=\frac{5}{x+3}+\frac{3}{2(x+3)}$;

7) $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$;

8) $\frac{8}{3t-3}-\frac{2-t}{t-2}=\frac{5}{2-2t}-\frac{5}{18}$;

9) $5-\frac{45}{4x^2-1}=\frac{3x}{2x-1}-\frac{39}{2x+1}$;

10) $4-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x+1}-\frac{x+11}{x^2-1}$.

600. Lahenda võrrand (kui tundmatuks on x):

1) $x+\frac{x}{a}=b$; 2) $x-a=\frac{x}{b}$;

3) $\frac{x}{m}-x=n$; 4) $x+\frac{ax}{b}=1$;

5) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$; 6) $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=1$;

7) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2-b^2}{ab}=x:\frac{(a-b)^2}{ab}$;

8) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}:\left(1+\frac{a}{b}\right)=\left(1-\frac{b}{a}\right):x$.

601. Lahenda võrratus

1) $2(x-2)+3>3x-1$;

2) $3x-3(2x+1)\leqslant 5(x+1)$;

3) $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}\geqslant\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$;

4) $2+\frac{3(x+1)}{8}>3-\frac{x-1}{4}$.

602. Kirjuta arvu a astmena avaldis

1) $\sqrt{a}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{a^3}$; 5) $\sqrt[3]{a}$; 6) $\sqrt[5]{a^4}$;

7) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; 9) $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$; 10) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^{-2}}}$.

603. Lihtsusta avaldis

1) $\frac{1-a^{-1}}{a-a^{-1}}$; 2) $(1+a)^{\frac{1}{2}}(1+a^{-1})^{\frac{-1}{2}}$; 3) $(x^2+2+x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$.

604. Tõesta, et arv 2,25 on võrrandi
$x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$
lahend.

605. Esita sirge võrrand, kui on antud

1) $A(3;\ -5)$ ja $B(2;\ -1)$;
2) $A(-1;\ -2)$ ja $B(3;\ -4)$;
3) $A(2;\ -3)$ ja $k=\frac{1}{2}$;
4) $A(-5;\ 4)$ ja $k=-2$;
5) $A(-1;\ 5)$ ja $\vec{v}=(2;\ -3)$;
6) $A(3;\ -2)$ ja $\vec{v}=(-4;\ 1)$;
7) $b=3$ ja $k=4$;
8) $b=-2$ ja $k=-3$;
9) $a=3$ ja $b=5$;
10) $a=-2$ ja $b=-5$.

606. Kirjelda sirge asendit koordinaatteljestikus, kui sirge on antud oma võrrandiga

1) $x=-2$;
2) $y=3{,}8$;
3) $y=x$;
4) $y=-x$;
5) $y=3x-5$;
6) $y=-2x+1$;
7) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-3}$;
8) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y-5}{3}$;
9) $y+2=3(x-5)$;
10) $y-1=\frac{1}{2}(x+2)$;
11) $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{4+1}$;
12) $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-c}{d-c}$.

607. Leia ringjoone keskpunkt ja raadius ning lihtsusta võrrand teljestiku lükke abil, kui ringjoone võrrand on

1) $x^2+y^2+8x-9=0$;
2) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;
3) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$;
4) $2x^2+2y^2-6x+8y=0$.

608. Leia joonte lõikepunktid, kui joonte võrrandid on

1) $y=x-1$ ja $2x-y=3$;
2) $3x-y=5$ ja $-2x-3y=4$;
3) $y=x\sqrt{7}-4$ ja $x^2+y^2=16$;
4) $x+y=3$ ja $(x+1)^2+(y-2)^2=36$;
5) $x^2+y^2=25$ ja $xy=-12$;
6) $x^2+y^2=25$ ja $(x-2)^2+(y+1)^2=26$;
7) $y=x^2$ ja $2x+5y=3$;
8) $y=2x^2-5x+2$ ja $\frac{x+2}{4}=\frac{y+3}{3}$;
9) $y=3x^2-2x+1$ ja $y=-2x^2+3$;
10) $y=x^2-3x-7$ ja $y=2x^2+x-3$;
11) $y=x^2-5$ ja $x^2+y^2=25$;
12) $y=-2x^2$ ja $x^2+(y-2)^2=17$.

609. Lihtsusta lükke abil joone võrrand

1) $y=3x+5$; 2) $y=-x+6$; 3) $y=-5x+9$;
4) $y=x^2+4$; 5) $y=x(x-5)$; 6) $y=x^2+5x+6$.

610. Leia kolmnurga peegeldused koordinaattelgede ning sirge $y=x$ suhtes, kui kolmnurga tippudeks on

1) $A(-1;\ 2)$, $B(0;\ 5)$ ja $C(2;\ -3)$;
2) $A(5;\ 6)$, $B(3;\ -2)$ ja $C(-4;\ 1)$;
3) $A(2;\ 0)$, $B(-4;\ -5)$ ja $C(-1;\ 3)$.

611. Kirjelda ruutfunktsiooni, s. t. avalda kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond, tee kindlaks, mitu nullkohta on ning kuidas avalduvad positiivsus- ja negtiivsuspiirkond nende nullkohtade kaudu, kui on antud ruutfunktsiooni graafiku haripunkti H koordinaadid ja ruutliikme kordaja a märk:

1) $H(-1;\ -3)$, $a>0$; 2) $H(3;\ 2)$, $a>0$;
3) $H(-3;\ 5)$, $a<0$; 4) $H(2;\ -3)$, $a<0$.

612. Uuri funktsiooni, s. t. leia tema nullkohad, positiivsuspiirkond, negatiivsuspiirkond, kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond ning selgita, kas on tegemist paaris- või paaritu funktsiooniga:

1) $y=x-1$; 2) $y=(x-1)^2$; 3) $y=x^2-1$;
4) $y=\frac{x-1}{2}$; 5) $y=2(x-1)$; 6) $y=\frac{2}{x}$;
7) $y=x^2+4x-3$; 8) $y=x(x-1)$; 9) $y=2x^2-9x+10$.

613. Esita funktsioonid, mille graafikud on sümmeetrilised antud funktsiooni graafikuga x-telje suhtes, y-telje suhtes ja koordinaatide alguspunkti suhtes, kui antud funktsioon on

1) $y=3x$; 2) $y=\frac{x}{3}$; 3) $y=x-3$;

4) $y=3x+3$; 5) $y=\frac{x+3}{3}$; 6) $y=3(x+3)$;

7) $y=x^2-x-2$; 8) $y=x(x+3)$; 9) $y=-2x^2+3x-1$.

614. Leia järgmise funktsiooni pöördfunktsioon:

1) $y=2x$; 2) $y=\frac{x}{2}$; 3) $y=-\frac{2}{3}x$;

4) $y=3x-5$; 5) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{5}$; 6) $y=2{,}4x-1{,}6$.

615. Lahenda võrrand

1) $|2x-3|+2x=5$;
2) $|5x-1|-4x=1$;
3) $|x^2+x-1|+x^2=0$;
4) $|2x^2-x-1|-x^2=1$.

616. Lahenda võrratus

1) $|2x-4|+2x<6$;
2) $|3x+5|-2x>10$;
3) $|x^2-x|<1$;
4) $|x^2+x|>1$.

617. Leia aritmeetilise jada üldliige, kui jada on

1) 7, 15, 23, 31, 39, . . .;
2) 1, 1,25, 1,5, 1,75, 2, . . .;
3) $2\frac{1}{3}$, 3, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$, 5, . . .

618. Leia lineaarfunktsioon, mille väärtuste jada on

1) 3, 5, 7, 9, . . .;
2) -100, -95, -90, -85, . . .;
3) $-8\frac{1}{2}$, -5, $-1\frac{1}{2}$, 2, . . .

619. Aritmeetilise jada esimene liige on 8 ja vahe 7. Mitmes liige selles jadas on 120?

620. Mitu liiget on aritmeetilise jada lõikes, mille 1. liige on 6, 2. liige $10\frac{1}{3}$ ja viimane liige 136?

621. Leia aritmeetilise jada 7. liige, kui selle jada 4. liige on 21 ja 11. liige -28.

622. Aritmeetilise jada lõike 14. liige on 66, 134. liige 666 ja viimane liige 6666. Kui suur on jada 1. liige ja kui palju on jada lõikes liikmeid?

623. Täisnurkse kolmnurga külgede pikkusteks on kolm järjestikust aritmeetilise jada liiget, mille vahe on 7. Leia kolmnurga külgede pikkused.

624. Aritmeetilise jada lõikes on üheksa liiget. Teise ja kaheksanda liikme summa on 15. Kui suur on jada summa?

625. Mitu liiget on aritmeetilise jada lõikes, mille esimene liige on 12, vahe 4,2 ja summa 696?

626. Esitada arv 325 aritmeetilise jada lõike summana, mille esimene liige on 1 ja viimane liige 64.

627. Leia 11 järjestikust naturaalarvu, millede summa võrdub järgneva 10 järjestikuse naturaalarvu summaga.

628. Kehade vaba langemise seaduse põhjal langeb keha esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m võrra enam kui eelnevas. Mitu meetrit langeb see keha 9. sekundis? Mitme sekundiga langeb see keha 314 meetrit?

629. Hulknurga nurgad moodustavad aritmeetilise jada lõike
70°, 90°, 110°, . . .
Mitu nurka on sellel hulknurgal?

630. Kas saab konstrueerida hulknurga, mille nurgad moodustavad aritmeetilise jada lõike
45°, 55°, 65°, . . .?

631. Leia jada piirväärtus

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}+\frac{n^2}{3}-\frac{n^3}{4}\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{n-5}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+n}{3n-n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-5}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n-n^2}{n^2+3n+5}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2}{n^2-4n^3}$.

632. Kui suur on puu läbimõõt, kui tema ümbermõõt on
1) 3,14 m? 2) 20 dm? 2) 66 cm?

633. Ruudu külg on 8 cm. Leia selle ruudu siseringjoone (ümberringjoone) pikkus ja vastava ringi pindala.

634. Isa ja poeg jooksevad erinevatel radadel, mis on kontsentrilised ringjooned. Kui palju peab välimisel rajal jooksva poja kiirus olema isa kiirusest suurem, kui nad alustavad ja lõpetavad üheaegselt ning väiksema ringjoone raadius on 50 m ja suurema ringjoone raadius on 60 m? Kui suur on kahe ringjoone vahele jääv maatükk?

635. Silindri külgpindala on võrdne põhjade pindalade summaga ja põhja läbimõõt on 16 cm. Kui kõrge on silinder?

636. Silindri telglõige on ruut küljega a cm. Avalda silindri täispindala ja ruumala.

637. Silindri külgpinna laotus on ruut küljega a cm. Avalda silindri täispindala ja ruumala.

638. Kui suurendada silindri kõrgust 3 korda ja põhja läbimõõtu 2 korda, siis saame ruumala 0,96 m³. Kui suur on silindri esialgne ruumala?

639. Ristküliku üks külg on teisest kaks korda pikem. Kuidas suhtuvad nende silindrite ruumalad (pindalad), mis tekivad selle ristküliku pöörlemisel üks kord pikema ja teine kord lühema külje ümber?

640. Koonuse telglõige ja põhi on võrdpindsed. Arvuta põhja pindala, kui koonuse kõrgus on 11 cm.

641. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk ümbermõõduga 42 cm. Arvuta koonuse ruumala.

642. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 50 cm², pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala.

643. Ringi sektor on kõõlu abil jaotatav ringi segmendiks ja kolmnurgaks. Leia segmendi pindala, kui ringi raadius on 5 cm,
1) kõõlu pikkus on 6 cm;
2) sektori kesknurk on 60°;
3) kõõlu kaugus keskpunktist on 3 cm;
4) kõõlu ja raadiuse vaheline nurk on 30°.

644. 1 meeter on ligikaudu $\frac{1}{40\ 000\ 000}$ Maa ümbermõõdust, kui Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?

645. Leia meridiaani kraadi pikkus teades, et Maa raadius on 6370 km.

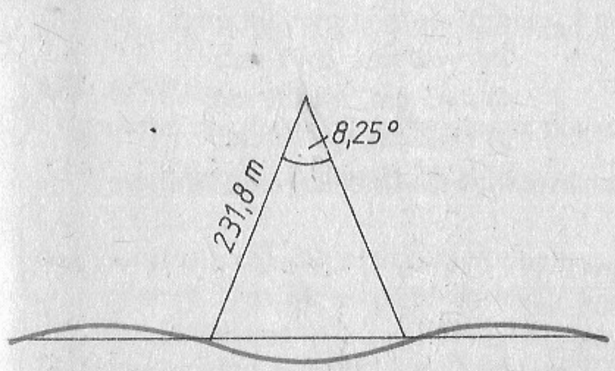
646. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse meremiiliks. Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.

647. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui ratta diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?

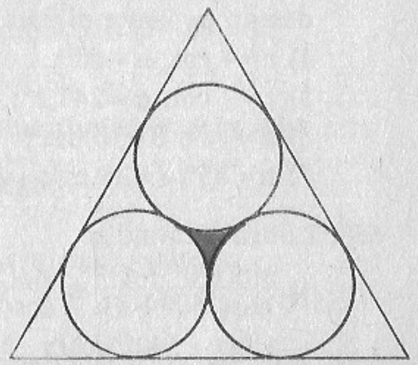
648. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?

649. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont mööda, vaid joonisel 7.1 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures ringide raadiused on 231,8 m ja kaartele vastav kesknurk 8,25°. Kui pika maa jooksis sportlane tegelikult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui ta oleks sirgjoont mööda joostes läbinud 100 m 11 sekundiga?

650. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga kahte külge (joon. 7.2). Leia nende ringide vahele jääva kõverjoonelise kolmnurga pindala.



Joonis 7.1



Joonis 7.2

651. Leia kella minutiosuti antud pöördenurga α sõltuvus ajast t (minutites), kui nurk α on antud 1) kraadides; 2) minutites. Millise nurga võrra (kraadides ja radiaanides) pöördub minutiosuti 5 minutiga, 12 minutiga, 45 minutiga, 90 minutiga, 2 tunni 24 minutiga?

652. Avalda kella tunniosuti pöördenurga α sõltuvus minutiosuti pöördenurgast β. Kui suure nurga võrra pöördub kella tunniosuti minutiosuti pöördumisel 1) $-30°$; 2) $-90°$; 3) $-270°$; 4) $-402°$; 5) $-0{,}288$ rad; 6) $-1{,}5$ rad; 7) $-\pi$ rad; 8) -6 rad võrra?

653. Kella minutiosuti pikkus on 12 cm. Avalda kella minutiosuti otsa poolt läbitud kaare pikkus l aja t (minutites) kaudu. Arvuta kaare kus l, kui 1) $t=5$ min; 2) $t=10$ min; 3) $t=25$ min; 4) $t=100$ min; 5) $t=3$ h 20 min.

654. Arvuta puuduvad suurused, kui sektori nurk on α, raadius r, kaare pikkus l ja pindala S:

1) $r=2$ cm, $\alpha=24°$;
2) $\alpha=0{,}875$ rad, $r=4$ cm;
3) $r=2$ cm, $S=10$ cm^2;
4) $r=5$ cm, $l=30$ cm;
5) $\alpha=60°$, $l=12$ cm;
6) $\alpha=2{,}5$ rad, $r=1{,}8$ cm;
7) $r=4$ cm, $S=16{,}4$ cm^2;
8) $l=8$ cm, $S=12$ cm^2.

655. Tuleta valem segmendi pindala arvutamiseks, kui on teada ringjoone raadius ja segmendi kaare kaarekradide arv.

656. Tõesta, et segmendi pindala

$$S=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha),$$

kus r on vastava ringjoone raadius ja α on segemendi kaar radiaanides.

657. Arvuta puuduvad suurused, kui segmendi kaar kraadides või radiaanides on α, kaare pikkus on l, raadius on r ja pindala on S:

1) $r=4$ cm, $\alpha=60°$;
2) $r=10$ cm, $\alpha=1$ rad;
3) $r=3$ cm, $\alpha=247{,}2°$;
4) $r=5$ cm, $\alpha=0{,}1$ rad;
5) $\alpha=80°$, $S=10$ cm^2;
6) $r=2$ cm, $l=3{,}6$ cm;
7) $\alpha=85°$, $l=38$ cm;
8) $\alpha=3{,}15$ rad, $S=8$ cm^2.

658. Lihtsusta avaldis

1) $\dfrac{\sin(180°+\alpha)}{\cos(360°+\alpha)}+\dfrac{\sin(360°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(x-540°)\cos(x-180°)}{\tan(x-900°)}$;

3) $\dfrac{\sin^2(x-180°)-\cos^3(270°-x)\sin(180°+x)}{\tan^2(90°-x)\cos^2(x-270°)\sin^2(x-90°)}$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)}$;

5) $\dfrac{\tan(2\alpha-\beta)-\tan(180°+\beta-2\alpha)}{1:\tan(\beta-2\alpha)-1:\tan(180°-\beta+2\alpha)}$;

6) $\dfrac{\sin^2(x+45°)}{\cos(x-45°)\cos(45°-x)}$;

7) $\dfrac{\cos^3(-x)+\sin^3(-x)}{\cos(2\pi-x)+\sin(\pi+x)}$;

8) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

9) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}+\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)}$.

659. Lihtsusta avaldis

1) $\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{3\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}$;

2) $\cos 4\cos 9+\sin 4\sin 9$;

3) $4\sin^2 1\cos^2 1+(\cos^2 1-\sin^2 1)^2$;

4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2\right)$.

660. Tõesta samasus

1) $\dfrac{\sin^3(\pi-\alpha)-\cos^3(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}=1-0{,}5\sin 2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(8\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}+\dfrac{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}=2\tan\alpha$

3) $\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)=2\cos 2\alpha\cos 2\beta$;

4) $\dfrac{\tan^2\alpha-\tan^2(\pi-\beta)}{\tan^2(\pi+\alpha)\tan^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

661. Tõesta, et kui $\tan\alpha-\tan\beta=1+\tan\alpha\tan\beta$, siis $\alpha-\beta=45°$.

662. Arvuta

$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\gamma$, kui nurgad α, β ja γ on aritmeetilise jada järjestikused liikmed vahega $\dfrac{\pi}{3}$.

663. Lihtsusta avaldis ja arvuta võimaluse korral selle väärtus:

1) $\sin 6°\cos 84°+\cos 6°\sin 84°$;
2) $\sin 98°\cos 8°-\cos 98°\sin 8°$;
3) $\cos 187°\cos 127°+\sin 187°\sin 127°$;
4) $\cos 76°\cos 31°+\cos 14°\cos 59°$;

5) $\cos 31^\circ \cos 14^\circ - \sin 31^\circ \cos 76^\circ$;
6) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha$;
7) $\cos(45^\circ - \alpha)\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)$;
8) $\cos(\alpha - \beta) - \tan(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;
9) $\cos(\alpha + \beta) - \tan(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta)$.

664. Leia argumendi x väärtus, kui

1) $\sin x = 0{,}4259$ ja $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin x = -0{,}8423$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos x = -0{,}9608$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

4) $\cos x = 0{,}0493$ ja $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

5) $\tan x = 1{,}2604$ ja $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

6) $\tan x = -3{,}9294$ ja $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

665. Arvuta

1) $\sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos(180^\circ + 60^\circ) + \tan(-45^\circ)$;
2) $\sin(180^\circ + 45^\circ)\tan(360^\circ - 45^\circ)\cos(180^\circ - 45^\circ)$;
3) $\tan 210^\circ \cos 315^\circ \sin 120^\circ + \cos 240^\circ$;
4) $\tan 750^\circ \cos 1230^\circ + \sin(-1440^\circ) \tan 810^\circ$.

666. Lihtsusta avaldis

1) $\frac{\cos 135^\circ \sin 225^\circ}{\cos(-60^\circ)} - \frac{\tan 180^\circ \tan 60^\circ}{\cos 540^\circ}$;
2) $\sin^2(-330^\circ) - \cos^2(-120^\circ) - \tan^2(-240^\circ) + \tan^2(-300^\circ)$;
3) $\sin 390^\circ + \cos 390^\circ + \tan 390^\circ$;
4) $\sin 900^\circ \cos 180^\circ + \cos 720^\circ \sin 270^\circ$;
5) $\cos^2 190^\circ + \sin^2 350^\circ + \tan^2 170^\circ$.

667. Leia

1) $\sin 126^\circ$;	2) $\cos 174^\circ$;	3) $\tan 94^\circ$;
4) $\sin 200^\circ$;	5) $\cos 188^\circ$;	6) $\tan 244^\circ$;
7) $\sin 285^\circ 18'$;	8) $\cos 305^\circ 48'$;	9) $\tan 350^\circ 54'$;
10) $\sin 1205^\circ$;	11) $\cos 7244^\circ$;	12) $\tan 870^\circ 19'$;
13) $\sin 99^\circ 47'$;	14) $\cos 803^\circ 9'$;	15) $\tan 541^\circ 27'$.

668. Leia nurk α, kui

1) $\sin\alpha = 0{,}8736$ ja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8736$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
3) $\sin\alpha = -0{,}6022$ ja $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
4) $\sin\alpha = 0{,}4627$ ja $0^\circ < \alpha < 360^\circ$;
5) $\sin\alpha = -0{,}6736$ ja $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;
6) $\cos\alpha = 0{,}0072$ ja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
7) $\cos\alpha = 0{,}8609$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
8) $\cos\alpha = -0{,}5555$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
9) $\tan\alpha = 3{,}675$ ja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
10) $\tan\alpha = -1{,}5454$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
11) $\tan\alpha = -2{,}005$ ja $0^\circ < \alpha < 360^\circ$;
12) $\tan\alpha = 6{,}901$ ja $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

669. Lihtsusta avaldis

1) $\sin 28^\circ \cos 32^\circ + \cos 28^\circ \sin 32^\circ$;
2) $\cos 89^\circ \cos 44^\circ + \sin 89^\circ \sin 44^\circ$;
3) $\cos(45^\circ + \alpha)\cos(15^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)\sin(15^\circ - \alpha)$;
4) $\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;
5) $\frac{1}{1 + \tan\alpha \tan 2\alpha}$;
6) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$.

670. Tõesta samasus

1) $\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

2) $2\sin\alpha + \sin 2\alpha = 4\sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$;

3) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$;

4) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

671. Leia

1) $\sin 2\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}6$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
2) $\sin 2\alpha$, kui $\cos\alpha = -0{,}1$ ja $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
3) $\cos 2\alpha$, kui $\sin\alpha = 0{,}25$;
4) $\cos 2\alpha$, kui $\cos\alpha = 0{,}92$;
5) $\tan 2\alpha$, kui $\tan\alpha = 4$;
6) $\tan 2\alpha$, kui $\sin\alpha = -0{,}8$ ja $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;
7) $\cos 2\alpha$, kui $\tan\alpha = 2$;
8) $\sin 2\alpha$, kui $\tan\alpha = -3$.

PEA MEELES

Arvuhulgad:

1) Naturaalarvude hulk $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2) Positiivsete täisarvude hulk $\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}_1=\{1, 2, 3, \ldots\}$

3) Negatiivsete täisarvude hulk $\mathbf{Z}^-=\{-1, -2, -3, \ldots\}$

4) Täisarvude hulk $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^+\cup\mathbf{Z}^-\cup\{0\}$

ehk $\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}^-$

5) Positiivsete murdarvude hulk $\mathbf{M}^+=\left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m\in\mathbf{Z}^+,\ n\in\mathbf{Z}^+,\ n\neq 1\right\}$

6) Negatiivsete murdarvude hulk $\mathbf{M}^-=\left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m\in\mathbf{Z}^-,\ n\in\mathbf{Z}^+,\ n\neq 1\right\}$

7) Murdarvude hulk $\mathbf{M}=\mathbf{M}^+\cup\mathbf{M}^-$

ehk $\mathbf{M}=\left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0,\ n\neq 1\right\}$

8) Ratsionaalarvude hulk $\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\cup\mathbf{M}$

9) Irratsionaalarvude hulk $\mathbf{I}=\{$lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud$\}$

10) Reaalarvude hulk $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}$

Sirge võrrandid:

1) Üldvõrrand $ax+by=c$

$ax+by+c=0$

2) x-teljega paralleelne sirge $y=b$

3) y-teljega paralleelne sirge $x=a$

4) Koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajad $y=x$ ja $y=-x$

5) Punktiga $A(x_1;\ y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{v}=(v_1;\ v_2)$ määratud sirge $\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}$

ehk $v_2(x-x_1)=v_1(y-y_1)$

6) Punktidega $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$ määratud sirge $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

7) Punktidega $A(a;\ 0)$ ja $B(0;\ b)$ ehk telglõikudega a ja b määratud sirge $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

8) Punktiga $A(x_1;\ y_1)$ ja tõusuga k määratud sirge $y-y_1=k(x-x_1)$

9) Tõusuga k ja algordinaadiga b määratud sirge $y=kx+b$

Kaks sirget $a_1x+b_1y=c_1$ ja $a_2x+b_2y=c_2$

1) lõikuvad punktis $L\left(\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right)$, kui $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$,

2) on paralleelsed, kui $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ ja $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$,

3) on ühtivad, kui $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ ja $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Ringjoone võrrand

1) kui keskpunktiks on $K(k_1;\ k_2)$ ja raadiuseks r $(x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2$

2) kui keskpunktiks on $O(0;\ 0)$ ja raadiuseks r $x^2+y^2=r^2$

Parabooli võrrand $y=ax^2+bx+c$, kus $a\neq 0$

Parabooli sümmeetriatelg $x=-\frac{b}{2a}$

Parabooli haripunkt $H\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Hüperbooli võrrand $y=\frac{a}{x}$ ehk $xy=a$

7 Arvu absoluutväärtus $|a| = \begin{cases} a, \text{ kui } a \geq 0 \\ -a, \text{ kui } a < 0 \end{cases}$

Absoluutväärtusi sisaldavad võrratused $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee a < x$

Aritmeetiline jada $a_n = a_{n-1} + d$

Üldliige $a_n = a_1 + (n-1)d$

Esimese n liikme summa $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Ringjoone pikkus ja ringi pindala $c = 2\pi r$ $S = \pi r^2$

Kaare pikkus $l = \frac{\pi r \alpha}{180}$ $l = xr$

Sektori pindala $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$ $S = \frac{xr^2}{2}$

Silindri külgpindala ja ruumala $S_k = 2\pi rh$ $V = \pi r^2 h$

Koonuse külgpindala ja ruumala $S_k = \pi rm$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Paarisfunktsioon: $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral

Paaritu funktsioon: $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral

Sisunäitaja

A
argumendi väärtuste piirkond — 73
argument — 73
aritmeetiline jada — 118
aritmeetilise jada esimese n liikme summa — 124
aritmeetilise jada vahe — 119
aritmeetilise jada üldliikme valem — 120
arvjada — 115
astmefunktsioon — 100

B
biruutvõrrand — 49

E
ekstreemumpunkt — 94

F
funktsioon — 92
funktsiooni graafiku peegeldus — 96, 103
funktsiooni kahanemispiirkond — 74
— kasvamispiirkond — 74
— muutumispiirkond — 92
— määramispiirkond — 73, 92
— nullkohtade hulk — 74
— negatiivsuspiirkond — 74
— positiivsuspiirkond — 74
— väärtuste piirkond — 74

H
hääbuv jada — 131, 132
hüperbool — 38

I
irratsionaalarv — 66

J
jada — 115
jada liige — 116
— lõige — 122
— piirväärtus — 133
— üldliige — 116
— üldliikme valem — 116
joone võrrand — 183

K
kaarekraad — 183
kaareminut — 183
kaare pikkus — 184, 186
kaareradiaan — 185
kaaresekund — 183
kahekordse nurga koosinus — 205
— — siinus — 205
— — tangens — 205
kahe punktiga määratud sirge võrrand — 22
kaherealine determinant — 30
kinnine vahemik — 71
kollineaarsed vektorid — 16
konstantne jada — 135
koonus — 145, 155
koonuse kõrgus — 155
— külgpind — 155
— külgpindala — 157, 158
— külgpinnalaotus — 157
— moodustaja — 155
— pinnalaotus — 157
— põhi — 155
— ristlõige — 155
— ruumala — 160
— telg — 155
— telglõige — 155
— tipp — 155
— täispindala — 157
koordinaattasandi esimese ja kolmanda veerandi poolitaja — 10
— teise ja neljanda veerandi poolitaja — 10
kraad — 179
kujundi lüke — 51
kujutis — 94

L
lahtine vahemik — 71
langev sirge — 77
lineaarfunktsioon — 73
lineaarfunktsiooni omadus — 119
lineaarvõrrand — 27
lineaarvõrrandisüsteemi determinant — 31
lõpmatu vahemik — 71
lükkevektor — 51

M
minut — 179
murdude hulk — 62

N
naturaalarvude hulk — 61
nurga koosinus — 165
nurgaradiaan — 187
nurga siinus — 164, 165
nurga tangens — 165

P
paarisarvulise astendajaga astmefunktsioon — 100
paarisfunktsioon — 98
paarituarvulise astendajaga astmefunktsioon — 106
paaritu funktsioon — 101, 104
parabool — 38
parabooli haripunkt — 81, 84
peegeldus — 94
peegeldespunkt — 101
peegeldustelg — 94
poolkinnine vahemik — 71
poolnurga koosinus — 209
— siinus — 208
— tangens — 210
positiivsete täisarvude hulk — 61
punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand — 20
punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand — 26
punkti kujutis — 94, 102, 110
punkti peegeldus — 95, 101
pöördarv — 69
pöördfunktsioon — 108, 109, 112
pöördkeha — 145

R
radiaan — 187
radiaanmõõt — 187
ratsionaalarvude hulk — 62
reaalarvude hulk — 68
ringi pindala — 141
ringjoon — 41
ringjoone pikkus — 139
ringjoone võrrand — 41
ruutfunktsioon — 73

S
sektor — 182
sektori pindala — 182, 192
sekund — 179
silinder — 145, 146
silindri külgpind — 146
— külgpindala — 149, 150
— külgpinnalaotus — 149
— kõrgus — 149
— moodustaja — 146
— pinnalaotus — 149
— põhjad — 146
— ristlõige — 146
— ruumala — 152
— telg — 146
— telglõige — 146
— täispindala — 149
sirge sihivektor — 13
sirge tõus — 24
sirge tõusunurk — 14
sirge võrrand — 15
sirge võrrand telglõikudes — 23
sirge üldvõrrand — 28
sümmeetriakeskpunkt — 101
sümmeetriatelg — 94
sümmeetriline — 94

T
taandamisvalemid — 77
telglõigud — 23
tihe hulk — 63
tõkestamatult kasvav jada — 128
tõusev sirge — 76
täisarvude hulk — 61

V
vastandarv — 69

X
x-teljega paralleelse sirge võrrand — 8

Y
y-teljega paralleelse sirge võrrand — 8

SISUKORD

Õpiku kasutajale 3
1. **Sirge võrrand** 4
Kordamine 5
1.1. Koordinaattelgedega paralleelsete sirgete võrrandid 7
1.2. Koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja võrrand 10
1.3. Sirge määramisviise 12
1.4. Kollineaarsed vektorid 16
1.5. Punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand 20
1.6. Kahe punktiga määratud sirge võrrand 22
1.7. Punkti ja tõusunurgaga määratud sirge võrrand 23
1.8. Sirge üldvõrrand 27
1.9. Kahe sirge lõikepunkt 29
1.10. Kaks paralleelset sirget, kaks ühtivat sirget 33
Kordamine 36
2. **Joone võrrand** 38
2.1. Joone võrrandi mõiste 39
2.2. Ringjoone võrrand 41
2.3. Sirge ja ringjoone vastastikused asendid 45
2.4. Kahe joone vastastikused asendid 48
2.5. Kujundi lüke 51
2.6. Sirge ja parabooli lüke 53
2.7. Koordinaatteljestiku lüke 56
Kordamine 59
3. **Funktsiooni uurimine** 61
3.1. Reaalarvude hulk 61
1. Ratsionaalarvude hulk 61
2. Irratsionaalarvude hulk 65
3. Reaalarvude hulk 67
4. Reaalarvude piirkonnad 71
3.2. Lineaarfunktsiooni ja ruutfunktsiooni uurimine 73
1. Lineaarfunktsiooni uurimine 76
2. Ruutfunktsiooni uurimine 81
3. Parabooli haripunkt 84
4. Määramispiirkonna erinevates osades erinevalt defineeritud funktsioonide uurimine 87
5. Absoluutväärtust sisaldavate lineaaravaldiste ja ruutkolmliikmete uurimine 88
3.3. Funktsiooni uurimise ülesanne 91
3.4. Paarisfunktsioon 94
1. Punkti peegeldus sirge suhtes 94
2. Funktsiooni graafiku peegeldused koordinaattelgede suhtes 96
3. Paarisfunktsioon ja selle graafik 98
4. Paarisarvulise astendajaga astmefunktsioon 100
3.5. Paaritu funktsioon 101
1. Punkti peegeldus punkti suhtes 101
2. Funktsiooni graafiku peegeldus koordinaatide alguspunkti suhtes 103
3. Paaritu funktsioon ja selle graafik 104
4. Paarituarvulise astendajaga astmefunktsioon 106
3.6. Pöördfunktsioon 108
1. Pöördfunktsiooni mõiste 108
2. Punkti kujutis peegeldamisel sirge $y = x$ suhtes 110
3. Pöördfunktsiooni graafik 112
Kordamine 114

P
paari
funk
paari
paari
funk
paari
parab
parab
peeg
peeg
peeg
pool
pool
—
—
posit
punk
võrra
punk
võrra
punk
punk
pöör
pöör
pöör

R
radia
radia
ratsi
reaal
ringi
ringj
ringj
ringj
ruutf

S
sektc
sektc

4. **Jadad** 115
4.1. Jada mõiste 115
4.2. Aritmeetiline jada 118
1. Aritmeetilise jada üldliikme valem 120
2. Aritmeetilise jada esimese *n* liikme summa 122
4.3. Tõkestamatult kasvav jada 128
4.4. Hääbuv jada 130
4.5. Jada piirväärtuse mõiste 133
4.6. Jada piirväärtuse arvutamine 135
4.7. Ringjoone pikkus piirväärtusena 138
4.8. Ringi pindala piirväärtusena 141
Kordamine 143
5. **Pöördkehad** 145
5.1. Silinder 146
5.2. Silindri pinnalaotus ja pindala 149
5.3. Silindri ruumala 152
5.4. Koonus 155
5.5. Koonuse pinnalaotus ja pindala 157
5.6. Koonuse ruumala 160
Kordamine 162
6. **Trigonomeetria** 164
Kordamine 164
6.1. Kolmanda veerandi nurga siinus, koosinus ja tangens 171
6.2. Neljanda veerandi nurga siinus, koosinus ja tangens 173
6.3. Negatiivse nurga siinus, koosinus ja tangens 175
6.4. Taandamisvalemid 177
6.5. Nurga kraadimõõt 179
1. Nurga mõõtmine 179
2. Sektori pindala 182
6.6. Kaare kraadimõõt 183
6.7. Kaareradiaan 185
6.8. Nurgaradiaan 187
1. Radiaanmõõt 187
2. Sektori pindala 192
Kordamine 193
6.9. Kahe nurga summa ja vahe siinus 197
6.10. Kahe nurga summa ja vahe koosinus 200
6.11. Kahe nurga summa ja vahe tangens 203
6.12. Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens 205
6.13. Poolnurga siinus, koosinus ja tangens 208
6.14. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks 212
Kordamine 217
Üldiseks kordamiseks 222
Pea meeles 234

Олаф Принитс, Калле Вельскер. **Математика для IX класса.** На эстонском языке. Под редакцией Юло Каазика. Художник-оформитель В. Пяэзуке. Таллин, "Валгус". Toimetaja T. Kilgas. Kunstiline toimetaja M. Henno. Tehniline toimetaja T. Linkvist. Korrektorid S. Hiie ja M. Mere.
ИБ № 5401.
Laduda antud 06. 01. 86. Trükkida antud 23. 05. 86. Formaat 60x90/16. Ofsetpaber nr. 1. Kiri English Times. Ofsettrükk. Tingtrükipoognaid 15,0 + 0,31 (ees- ja tagaleht). Tingvärvitõmmiseid 30,94. Arvestuspoognaid 11,27 + 0,44 (ees- ja tagaleht). Trükiarv 24 000. Tellimuse nr. 294. Hind 25 kop. Kirjastus "Valgus", 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10. Trükikoda "Oktoober", 200105 Tallinn, Kreutzwaldi 24. Trükk: trükikoda "Punane Täht", 200001 Tallinn, Pikk 58. Köitmine: trükikoda "Ühiselu", 200001 Tallinn, Pikk 40/42.

Tallinna 7. Keskkool
(kooli nimi)

Opiku kasutajad.

Oppeaasta	Opilase ees- ja perekonnanimi	Opiku seisund vastuvõtmisel	Hinne õpiku kasutajale
19.../..	A. Kanepi	uus	
1989/90	Mae Hallistvee	kasutatud	
19.../..			
19.../..			
19.../..			

Rikutud leheküljed:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	puudub	0	puudub	0

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+2n\pi)=\tan\alpha$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$